



华中科技大学数学中心

Center for Mathematical Sciences

中国 武汉
Wuhan China

Newsletter, Autumn 2023

- ◆ 克尔德什应用数学研究所
- ◆ 数学中心教师简介——高婷、林聪萍
- ◆ 数学中心近期研究进展
- ◆ 杨乐：半个世纪的进与退
- ◆ 数学计算与实验研究所：2013-2023
- ◆ 流动证明帮助数学家在混沌中找到稳定性





华中科技大学数学中心
Center for Mathematical Sciences

华中科技大学数学中心简介

在建设世界一流大学的征程中，数学学科的作用异常重要。华中科技大学高瞻远瞩，于2013年成立数学中心。华中科技大学数学中心一方面倡导数学不同分支之间的相互交叉，激发新的合作研究，催生新的研究领域和研究群体。另一方面引领数学与工科、理科，医科及其它学科之间的合作研究，实现交叉创新、合作共赢。

作为我校国际交流与合作的平台，数学中心大力推动与发展“跨学科应用数学”合作研究。我们的跨学科合作研究领域包括数学与地球科学（物理海洋学和气候动力学）的交叉研究，以及数学与生命科学（计算和定量生物学）的交叉研究。

华中科技大学数学中心积极开展前瞻性研究，立足华中、辐射全国、影响海外。数学中心将国际先进的人才培养模式和研究机构运行机制有机融入到我国建设一流大学与一流学科的伟大事业之中，努力成为培养和聚集一流人才的平台，国际交流与合作的平台，科教运行机制以及人事体制改革试点的平台。

数学中心成员包括院士，国家特聘专家，外专千人计划专家，长江学者，青年学术英才，楚天学者，洪堡学者和华中学者。还有一批海内外知名访问学者，博士后，博士生，以及来自多个国家的留学生。数学中心设有李国平讲座教授，东湖讲座教授，东湖数学论坛，和郭友中数理科学讲座。

希望重要的数学发现萌芽于此，
希望新的研究领域和研究群体产生于此，
希望著名数学家和科学家在此留下足迹，
希望科技界更深刻地感受到数学的作用：
数学强，则科技强；科技强，则国家强！



数学中心官网

地址：中国湖北武汉珞喻路1037号
华中科技大学创新研究院（恩明楼）8楼
邮编：430074
网页：mathcenter.hust.edu.cn
电邮：mathcenter@hust.edu.cn



数学中心微信公众号

Huazhong University of Science and Technology
1037 Luoyu Road, Wuhan, China
Postal Code : 430074
Web : mathcenter.hust.edu.cn
E-mail : mathcenter@hust.edu.cn



目 录

News

新闻

| | |
|------------------------|---|
| 克尔德什应用数学研究所 | 1 |
| 数学中心教师简介——高婷、林聪萍 | 3 |
| 学术交流 | 5 |
| 国际会议 | 9 |

Academic Achievement

学术成果

| | |
|------------------|----|
| 数学中心近期研究进展 | 52 |
|------------------|----|

Qualifying Exams

资格考试

| | |
|---|----|
| Test of English for Math Writing | 55 |
| Classical Mechanics Qualifying Exam | 58 |

Celebrity Stories

名人故事

| | |
|-------------------|----|
| 杨乐：半个世纪的进与退 | 61 |
|-------------------|----|

Popular Mathematics

数学热门话题

| | |
|----------------------------|----|
| ICERM: 10 years later | |
| 数学计算与实验研究所：2013-2023 | 70 |



| | |
|--|----|
| Flow Proof Helps Mathematicians Find Stability in Chaos | |
| 流动证明帮助数学家在混沌中找到稳定性..... | 78 |
| Why Mathematicians Re-Prove What They Already Know | |
| 为什么数学家要再次证明他们已经知道的内容..... | 85 |
| The Deep Link Equating Math Proofs and Computer Programs | |
| 将数学证明等同于计算机程序的深层链接..... | 87 |



News 新闻

克尔德什应用数学研究所

克尔德什应用数学研究所 (Keldysh Institute of Applied Mathematics) (俄罗斯科学院) 成立于 1953 年, 是一个专门研究计算数学的研究所。该研究所的建立是为了解决涉及太空研究、原子能和热核能及导弹技术应用等国家项目的复杂数学问题。自 2016 年以来, 生物研究的数学和计算方法的发展, 以及使用这些方法直接解决计算生物学问题, 也被纳入了该研究所的科学活动范围。这一目标旨在通过开发和使用适当的计算机硬件和软件设施来实现。该研究所创始人和首任所长 (1953 年-1978 年) 是苏联科学院院长姆斯季斯拉夫·克尔德什。

自成立以来, 该研究所致力于解决大规模应用问题, 其活动以该研究所科学家在数学、力学、控制论、信息学等方面的基础科学研究成果为基础。其中包括 4 名院士、5 名俄罗斯科学院通讯院士、74 名科学博士和 224 名科学候选人, 包括 14 名列宁奖获得者、30 名国家奖获得者和 5 名苏联部长奖获得者。

自第一颗卫星发射以来, 该研究所的弹道中心一直致力于无人和载人航天任务的导航支持, 包括长期轨道站“礼炮号”和“和平号”、苏联航天飞机“暴风雪”号、“月球”号、“金星”号、“火星”号宇宙飞船等的导航支持。它还参与了一些国际空间项目。该研究所将继续参与当前俄罗斯太空项目的执行。目前的研究涉及:

- 1、利用全球卫星导航系统 GPS 和 GLONASS 开发空间飞行器的实时管理和导航系统;
- 2、研究太阳系行星的大气层;
- 3、探索利用电动火箭发动机执行进一步行星际飞行任务的前景;
- 4、参与“Radio Astron”和 Fobos-Grunt 等项目。

该研究所在机车机器 (步行机器人) 的算法和软件支持、适应性机器人组装机器零件的人工操作自动化方面进行的研究已经得到了全世界的广泛认可。目前机器人技术的工作在以下领域进行: 虚拟足球、视觉系统、自动驾驶履带车辆等。

该研究所是该国最早开发并广泛认可进行理论研究的新技术的科学组织之一。这是一个基于完美数学模型、高效计算代码和高性能计算机的计算实验。

二十世纪最伟大的数学家之一盖尔范德 (I. M. Gelfand) 在 1989 年去美国之前曾担任热传导系主任。他从事泛函分析、代数和拓扑学方面的基础工作。A. N. Tikhonov 最初也在这些数学领域工作。然而, Tikhonov 更为人所知的是他更具应用方向的工作, 例如求解不适定问题的方法 (Tikhonov 正则化)。Tikhonov 还创立了微分方程理论, 在最



高导数处有一个小参数。差分格式稳定性的一般理论是由 A. A. Samarskii 提出的。Samarskii 认为数学建模是一门独立的科学学科。S. P. Kurdyumov 在俄罗斯创立了一个完整的非线性动力学和协同学科学学派。

目前，现有的数值方法库正在更新和改进，以应对日益复杂的模型和现代超级计算机的可能性。该研究所的科学家们详细阐述了解决计算问题的网格方法，这导致了一种声明性语言“Norma”的创建。

该研究所始终拥有国内工业所能提供的最先进的计算机技术。该研究所安装了第一台大规模生产的计算机，并组建了第一支苏联工程师团队，在计算机软件开发方面发挥先锋作用。最初的研究仍然是由一大批评估人员在机械计算器“Mercedes”上进行的。1955 年，第一台国产计算机“Strela”问世，特别是用它计算了第一颗卫星的轨道。在 1963 年 Algol-60 翻译器（完整语言版本中的第一个翻译器）和 IS-2（第一个迷你操作系统）被研究所专家开发和实施。软件开发的这一趋势在全规模操作系统 DISPAK 和 OS IPM、FORTRAN 优化编译器、用于图形数据表示的程序包 GRAFOR、超级计算机体系结构和软件、多机综合体和网络的研究中得到进一步延续。在研究所的活动中，应用问题的系统研究发挥着重要作用，例如：暴风雪号航天飞机的编程和调试系统、实时控制系统、不同应用的信息检索系统、CAD/CAM 系统、构建应用程序包的软件工具。

目前，基于多台超级计算机的分布式计算系统的创建工作正在进行中，这些超级计算机用于网格技术并开发了专门的操作系统（DVM）。

著名理论物理学家雅科夫·鲍里索维奇·泽尔多维奇（Yakov Borisovich Zel'dovich）领导着负责制造核武器和热核武器理论方面工作的一个部门。年轻的亚历山大·安德烈耶维奇·萨马尔斯基（Alexander Andreevich Samarskii）首次对核爆炸链式反应的宏观动力学进行了实际计算，从而得出了核武器威力的实际重要性估计值。在核能方面，该研究所还参与了中子输运和核反应过程的建模。

目前，在 S. P. Kurdyumov, A. A. Samarskii, Yu. P. Popov 的领导下，该研究所在等离子体物理和受控热核聚变领域的工作仍在继续。

自 2016 年以来，该研究所的兴趣范围还包括计算生物学问题，这些问题在 IMPB RAS（该研究所在普希诺的分支机构）中得到了解决。

人们非常重视教育和培训问题。该研究所是莫斯科国立大学、莫斯科工程师与物理研究所和莫斯科航空研究所的基础。莫斯科物理技术学院应用数学学院设在该学院。

克尔德什研究所是应用数学领域多项领先研究的主要研究者。该研究所科学家取得的成果在俄罗斯和国外都得到了认可。在不同的时期，计算中心、空间研究所、数学建模研究所等多个研究机构，都是从克尔德什研究所发展起来的，并成为俄罗斯科学院的主要科学中心。



数学中心教师简介——高婷、林聪萍

高婷，副研究员

高婷，1985年7月生，大学二年级加入中国共产党，政治立场明确，政治思想端正。2007年本科毕业于西南大学，2010年获西南大学应用数学硕士，2015年获得伊利诺伊理工大学应用数学博士学位。现任华中科技大学数学中心副研究员。

高婷的研究领域主要包括非高斯 Lévy 噪声下随机动力系统控制规律的学习、非高斯 Lévy 噪声下随机动力系统的有效动力学学习、基于动力学系统深度学习建模的可解释性及在高维复杂数据分析研究中的应用。在硕士研究生期间，研究 HIV 病毒与人体免疫系统的细胞动力学原理。提出利用时滞、脉冲微分方程建模，通过对其动力系统稳定性和分叉的分析，发现了 HIV 病毒与人体免疫系统在受体用药过程中抗药性的混沌学形态。博士期间参与完成了 Lévy 噪声激励下的随机动力系统的定型理论及数值模拟分析。提出利用平均逃逸时间、逃逸概率、随机过程的概率分布及最大可能转移轨道来研究随机动力系统的动力学性态。利用确定性方法研究了非高斯动力系统的反问题及数据同化，创建了计算非高斯过程的 Fokker-Planck 方程的数值算法。提出并开发了非局部偏微分方程解的数值解法，且被广泛应用于肿瘤、基因等生物数学模型。

2015年2月至2018年11月，高婷在美国最大的手游公司 Machine Zone 大数据产品研发部担任高级数据科学家，完成多项大数据产品，提高了公司产品的用户粘性、生命周期价值及公司长期净盈利额。主持研发了基于 Spark 的并行高维高阶 Markov 时间序列预测模型，基于深度学习和强化学习的个性化商品推荐系统并申请专利。2018年12月至2020年12月，高婷在美国 Twitter 大数据广告产品研发部门做机器学习算法工程师，进一步强化了其大数据工程水平。参与优化基于深度学习广告点击率模型，提出并开发了基于强化学习的实时竞价系统等。

高婷自2020年12月入职华中科技大学以来，合作指导多名博士、硕士与本科高年级学生的研究，指导的本科生中多名保送至北大、清华，两名申请到著名海外高校深造，指导一名本科生获得优秀毕业论文。骨干参与基金委重点专项一项、科技部重大项目一项。同时，积极开展校企合作：成立量化金融实验室并独立主持其横向项目一项，与哈步数据科技合作成立智能零售实验室促进武汉数字经济的发展，与瑞典公司 Privasea AB 成立隐私加密实验室并申请两项专利。

高婷近两年在 SIAM Journal on Scientific Computing, Applied Mathematical modeling, Applied Mathematics and Computation, Chaos 等国际权威期刊发表论文十余篇。其研究方向是当今国际随机动力系统与深度学习领域的研究热点，更是国家科学发展的迫切需要。



林聪萍，副研究员，数学中心副主任

林聪萍 2006 年本科毕业于浙江师范大学，2009 年获浙江师范大学数学硕士学位，而后受到英国罗素集团成员之一的英国埃克赛特大学全额资助攻读博士学位，于 2012 年 10 月毕业，2012 年-2016 年在英国埃克赛特大学做博士后。现为华中科技大学数学中心副研究员、副主任。

林聪萍主要从事系统生物方面的研究。通过数学建模，将活体细胞实验与数学理论进行有机结合，一方面为生物学家提供崭新的视角，来解释实验所观测到的现象或对实验难以解决的问题做出回答，为当代生物技术发展、医学研究提供理论支持；另一方面从相应模型研究中引发新的数学理论问题进行研究，推动数学的理论发展。研究内容主要涉及，分子马达以及细胞内各种细胞器的动力学机制研究中的数学、物理和生物的交叉研究问题。目前主要对细胞生物学、神经科学中的复杂动力学现象进行基于实验或临床数据的动力学建模，并进行模型分析与现实数据的比较，试图揭示现象背后的理论机理。在交叉学科杂志（如 Nature Communications、Biophysical J.）、数学杂志(如 Ergodic Theory and Dynamical Systems)、生物杂志(如 The EMBO J.)、材料科学杂志(如 Composite Structures)、天文科学杂志（如 Astrophysical J.）等国际权威期刊发表论文 20 余篇，索引达百余次。主持国家自然科学基金面上项目、青年各一项。



学术交流

短课

2023年8月英国华威大学梁歌春教授来访数学中心并讲授短课。

地点：科技楼 715

腾讯会议：581-7457-0596

课程安排：

| | Date | Time |
|---|------------|-------------------|
| 1 | 2023年8月14日 | 9:00-11:00 (A.M.) |
| 2 | 2023年8月15日 | 9:00-11:00 (A.M.) |
| 3 | 2023年8月16日 | 9:00-11:00 (A.M.) |

短课内容：

- Talk 1: Pricing and hedging in incomplete financial markets

We will first introduce the basic arbitrage theory, including how to replicate option payoffs by constructing replication portfolios in a complete market, which leads to risk-neutral valuation and the celebrated Black-Scholes equation. Then, we will add more realistic features such as stochastic volatility/local volatility. This will result in incomplete markets. I will finish the lecture by discussing several methods to handle market incompleteness, including superhedging, the Esther transform, the minimal martingale measure, and minimizing f -divergence.

- Talk 2: Portfolio optimization with trading constraints

We will start with the classical Merton's problem by deriving and solving its HJB equation. Then, I will introduce a general, possibly incomplete, financial market and solve a utility maximization problem with trading constraints. For exponential utility, we will solve it using martingale optimality and derive a quadratic backward stochastic differential equation. For a general utility, we will reply on a convex duality method which will lead to a coupled forward-backward stochastic differential equation.

- Talk 3: Nonlinear optimal stopping with Poisson constraints

We will introduce American options and their valuation using both variational inequality (for the Markovian case) and reflected backward stochastic differential equations (for the non-Markovian case). Then, we will discuss how to price and hedge an American option



in a nonlinear market with the market price of risk depending on the hedging positions, and the option is allowed to exercise at a sequence of Poisson stopping times. This will lead to a penalized backward stochastic differential equation.

报告人简介:

- Dr. Gechun Liang is a Reader in the Department of Statistics at the University of Warwick. His past positions include Associate Professor in the University of Warwick, Lecturer in King's College London and Postdoctoral Research Fellow at the Oxford-Man Institute of Quantitative Finance. In 2018-2019, he was honoured with the titles of FRIAS Senior Fellow and Marie Curie Fellow at the Freiburg Institute of Advanced Studies (FRIAS), University of Freiburg. He completed his D.Phil. (Ph.D.) in Mathematics at the Mathematical Institute, Oxford University in 2011. His research interests are mainly focused on mathematical finance and stochastic control, and has published extensively in journals such as Annals of Probability, SIAM Journal on Control and Optimization, Finance and Stochastics, Mathematical Finance, and SIAM Journal on Financial Mathematics.

2023年10月18日-2023年11月8日大湾区大学刘天辉老师线上讲授量子力学短课。

腾讯会议: 479-4551-4854

课程安排:

| | Date | Time |
|---|-------------|-------------------|
| 1 | 2023年10月18日 | 9:00-11:00 (A.M.) |
| 2 | 2023年10月20日 | 9:00-11:00 (A.M.) |
| 3 | 2023年10月25日 | 9:00-11:00 (A.M.) |
| 4 | 2023年10月27日 | 9:00-11:00 (A.M.) |
| 5 | 2023年11月1日 | 9:00-11:00 (A.M.) |
| 6 | 2023年11月3日 | 9:00-11:00 (A.M.) |
| 7 | 2023年11月8日 | 9:00-11:00 (A.M.) |



短课内容:

量子力学主要是研究微观粒子的低能运动，而分子反应动力学是在原子分子水平研究化学反应动态过程及本质机理的一个重要学科。本短课基于这两块领域，介绍了量子力学的发展历程，分子反应动力学的研究，含时波包理论，波函数和薛定谔方程等内容。

短课参考书籍:

曾谨言 《量子力学》

报告人简介:

刘天辉，大湾区大学副教授，毕业于中国科学院大连化学物理研究所，主要研究方向涉及：气相分子如 H_2O 、 H_2 以及 HCl 等在过渡金属表面解离活化的高精度全维势能面构建和量子动力学模拟



学术报告

报告题目: **Approximation Theory of Deep Learning for Sequence Modelling**

报告人: Qianxiao Li (National University of Singapore)

时间: 2023.09.14, 下午 14:00-16:00 (北京时间)

地点: 华中科技大学恩明楼数学中心 813

腾讯会议: 686-671-834

报告摘要:

- In this talk, we present some recent results on the approximation theory of deep learning architectures for sequence modelling. In particular, we formulate a basic mathematical framework, under which different popular architectures such as recurrent neural networks, dilated convolutional networks (e.g. WaveNet), encoder-decoder structures, and most recently - transformers - can be rigorously compared. These analyses reveal some interesting connections between approximation, memory, sparsity/low-rank, graphical structures that may guide the practical selection and design of these network architectures.

报告人简介:

- Qianxiao Li is an assistant professor in the Department of Mathematics, and a principal investigator in the Institute for Functional Intelligent Materials, National University of Singapore. He graduated with a BA in mathematics from the University of Cambridge and a PhD in applied mathematics from Princeton University. His research interests include the interplay of machine learning and dynamical systems, control theory, stochastic optimisation algorithms and data-driven methods for science and engineering.

更多课程回放内容, 关注哔哩哔哩官方账号: [华中大数学中心](#)



国际会议

- The Second HKSIAM Biennial Conference 2023, Hong Kong SAR. Time: August 28-September 1, 2023
本次会议作报告的有：段金桥，高婷。
<https://www.math.cuhk.edu.hk/conference/hksiam2023/mini-ms19.php>
- The 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2023). Time: August 20-25, 2023
<https://iciam2023.org/>
数学中心师生 2023 年 8 月 20 日-8 月 25 日赴日本东京参加第十届国际工业与应用数学大会，作报告的有：段金桥、高婷、赵蒙、方程、吕力、王子博、肖望；海报现场展示：杨璐璇。
- International Academic Summer Conference on Number Theory and Information Security（数论与信息安全暑期国际学术会议） Time: July 27, 2023-July 29, 2023
<http://www.hnskxy.com/info/1007/4620.htm>
- Dynamical systems and Semi-algebraic geometry: interactions with Optimization and Deep Learning, Conference 2023. Time: July 17, 2023-July 21, 2023
此次会议由挪威研究理事会、Vingroup 创新基金会（VinIF）和越南大叻大学资助。本次会议旨在汇集相关领域的专家，进行富有成效的讨论/合作。演讲者包括高级和初级研究人员。会议包括对研究领域概述的系列讲座和集中讨论更为突出主题的研究会谈。段金桥、高婷在此次会议作报告。
<https://www.mn.uio.no/math/english/research/projects/granddrm/events/conferences/dynamical-systems-and-semi-algebraic-geometry-inte/index.html>
- IUTAM Symposium on Data-driven Nonlinear and Stochastic Dynamics with the Control 6.5-6.9
数学中心师生于 2023 年 6 月 5 日-6 月 9 日参加 IUTAM 关于数据驱动的非线性和随机动力学与控制研讨会，该会议由西北工业大学承办，段金桥老师在此次会议作大会报告，高婷、肖望、方程、杨璐璇在本次会议作海报展示及 5 分钟快速报告。
- 中国工业与应用数学学会第二十一届年会（CSIAM 2023） Time: October 12-15, 2023
会议由学会主办、云南师范大学承办。1800 余名高校、科研院所的专家学者、企业代表、学生代表共襄盛会，分享最新成果，研讨热点问题，展望发展前景。方程在本次会议作报告。



参会感悟

- **The 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2023). Time: August 20-25, 2023**

ICIAM2023 参会印象

——方程

ICIAM2023 是一次令人难忘的学术盛会，它为我提供了一个与世界各地的顶尖学者和专业人士共同探讨和分享最新的数学应用研究成果的机会。

会场上聚集了来自各个领域的杰出研究人员和专家，他们的研究成果和思想碰撞激发了我的灵感。与会者们积极参与各种主题演讲、分会场讨论和海报展示，展示了他们在工业、金融、生物医学等领域的前沿研究。

此外，我有机会在 ICIAM2023 上展示自己的研究，这是一次宝贵的经历。我从该领域的研究人员和专家那里收到的反馈和讨论非常有见地，帮助我完善了我的工作。

美中不足的是，主办方没有多加考虑不同主题小型研讨会的影响力，常常出现非常热门的小型研讨会但会场座位非常少或比较偏远。另一方面，很多主题相近的研讨会在同一时间段，有点分身乏术。且大家也分散在不同的楼栋内，导致茶歇时间比较匆忙，疲于赶路。

尽管如此，我从其他研究人员的报告和讨论中获得了新的见解和启发，还建立了与他人的联系和合作关系。这次经历不仅拓宽了我的学术视野，还为我未来的研究和职业发展打下了坚实的基础。

● Learning Strange Attractors with Reservoir Systems

Author(s): Allen Hart (University of Bath)

相关文献: <https://arxiv.org/abs/2108.05024>

在该报告中，报告者探讨了 Takens 嵌入定理及其在表示、学习和分析混沌吸引子中的应用。根据该定理，随机生成的回声状态网络（即储层计算）（具有线性激活）在可逆动力系统的一般观测数据上训练，将相空间动力学嵌入到选定的欧几里得状态空间中，在动力系统的一般观察数据和动力系统本身驱动的状态空间动力学之间拓扑共轭。也就是说，Takens 嵌入定理提供了一种在欧几里得状态空间中表示混沌吸引子动力学的方法。

储层计算是循环神经网络（RNN）的一种，指使用固定的、随机生成的动力系统（称为储层）来处理输入信号。输入信号被注入到储层中，储层将其转换为高维特征向量，可用于分类或预测任务。通过调整线性读出层的权重来训练储层，该层将储层状态映射到所需的输出。衰减记忆属性和渐近稳定性是影响储层性能的两个重要属性。衰减记忆属性指储层状态在一定时间后忘记其初始条件，这使得储层能够处理任意长度的输入信号。渐近稳定性是指储层状态随着时间趋于无穷大而收敛到一个固定点或极限环，这确



保证了储层能够以稳定和可预测的方式处理输入信号。储层的性能受其衰减记忆属性和渐近稳定性的影响。

该结果为混沌吸引子的表示、学习和分析提供了额外的工具，并为储层计算提供了一定的深刻见解。将相关工作推广到随机动力系统，我们需要考虑映射、流形、以及将观测映射到的函数空间的变化。在随机动力系统中，混沌吸引子要考虑测度意义下，以及模型学到的混沌吸引子时强/弱意义下和原系统一致。

● Machine Learning for Predicting Missing Dynamics

Author(s): Shixiao Willing Jiang (ShanghaiTech University)

相关文献: <https://arxiv.org/abs/1910.05861>

在该报告中，报告者提出一个通用框架，利用可用的数据和机器学习技术来恢复缺失的动力系统。作者提出的恢复缺失动力系统框架将预测问题重新定义为一个监督学习问题，以近似一个映射，该映射将已解决和可识别的未解决变量的历史映射到已解决动力学中的缺失部分。这意味着该框架使用机器学习技术学习已解决和未解决变量之间的关系，然后使用这种关系来预测已解决动力学中的缺失部分。该框架不需要任何关于支配基础动态系统的完整方程的知识，并且可以使用任何机器学习技术来实现。作者发现 LSTM 作为 RNN 的一种特殊类别对于这个目标是稳健的。

所提出框架具有强大的收敛误差界限，可以在有限时间内收敛。但该框架的数值性能可能取决于具体应用和可用数据的质量。该框架已在三个原型应用中的严重截断动力学系统上进行了数值演示：地形平均流相互作用、非线性薛定谔方程和 Kuramoto-Shivashinsky 方程。这些示例中的闭合模型涉及 40 到 480 维函数的逼近。

缺失动力学利用已解决动力学部分来表征为模型约化提供了一定的启发，比如快慢系统中利用慢变量来表征快变量而不会损失太多的模型精度。储层计算作为 RNN 的一种可能在文中提到定理的变体下满足一定的误差上界，从而解决利用储层计算来处理随机系统的模型约化问题。

● Kernel Flows and Kernel Mode Decomposition for Learning Dynamical Systems from Data

Author(s): Boumediene Hamzi (Caltech)

相关文献: <https://arxiv.org/abs/2301.10321>

该报告介绍了一种称为稀疏核流 (Sparse Kernel Flows) 的新方法，该方法用于从时间序列数据中发现“最佳”内核。该方法基于一个包含大量项的基本内核，然后通过将一些初始项设置为零来使其稀疏化，它使用最小绝对值收缩和选择的特定算子 (Lasso) 来稀疏化，这是与传统的 Kernel Flows 方法的不同之处。该方法目标是寻找具有尽可能少的项和“最佳”仿真特性的“最佳”内核。作者将该方法应用于包含 132 个混沌动力



系统库，以评估其泛化和准确性。结果表明，与其他最先进的方法相比，稀疏核流在准确性和稀疏性方面表现更好。因此，稀疏核流可以成功地应用于系统逼近和混沌动力系统领域。

进一步地，可以考虑把稀疏核流方法扩展到处理更复杂和高维的系统，例如偏微分方程和随机系统，动力系统的控制和预测。也可探索使用其他类型的正则化（例如组稀疏性）来进一步提高学习内核的稀疏性。基于核来研究动力系统也有大量的工作，也许可以把稀疏核流方法推广到粒子系统或者基于核的反问题研究上，稀疏性可以导致算法的简单化和高效性且不损失精度。

● The Random Feature Method for Solving Partial Differential Equations

Author(s): Jingrun Chen (University of Science and Technology of China)

相关文献: <https://arxiv.org/abs/2207.13380>

在该报告中，作者提出了一种新的方法，使用随机特征模型作为将输入 Banach 空间映射到输出 Banach 空间的算子的数据驱动代理模型。在这种方法中，作者重点关注由偏微分方程（PDE）定义的算子，其中输入和输出都是函数。输入参数是指定问题所需的函数，例如初始数据或系数，输出是问题的解。随机特征模型用作非侵入式（nonintrusive）数据驱动模拟器来近似偏微分方程的参数到解图。该模型在一组输入输出对上训练，这些输入输出对是通过在一组输入参数值处求解偏微分方程而生成的。经过训练后，该模型可用于在新的输入参数值下高效、准确地近似偏微分方程的解，而无需再次求解偏微分方程。在离散化后，该模型从这个无限维度的视角继承了几个优良属性，包括与真实 PDE 解映射相对于网格不变的逼近误差和能够在网格分辨率上进行训练，然后在不同的网格分辨率上进行部署的能力。

作者展示了其高效、准确地近似两个典型偏微分方程的非线性参数到解映射的能力：粘性伯格方程和变系数椭圆方程。

随机特征模型在 PDE 领域广泛应用，其无穷维空间间的映射对构造概率测度空间上的无穷维映射提供了一个先例，可以尝试构建基于随机特征方法的无穷维空间映射的替代模型。

● Machine Learning for Stochastic Parametrisation

Author(s): Hannah Christensen (University of Oxford)

相关文献: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1029/2019MS001896>

在这项研究中，作者使用生成对抗网络（GANs）来改进随机参数化方法，以提高天气和气候模型的准确性。随机参数化是一种用于天气和气候建模的方法，用于考虑未解决的子网格过程的不确定性。它涉及从可能的子网格强迫分布中进行采样，以表示在大尺度条件下可能的子网格尺度趋势的概率分布。



文章介绍了 Lorenz'96 模型作为一个基准测试模型，用于评估生成对抗网络在随机参数化中的表现。研究表明，生成对抗网络可以有效地考虑子网格过程中的不确定性，并提高天气和气候模型的准确性。生成对抗网络在随机参数化方面的有效性在于它们能够捕获子网格过程和大规模变量之间的复杂非线性关系。它可以从训练数据中学习子网格过程的统计特性，并生成代表底层分布的合成样本。这使得生成对抗网络能够以与子网格过程中观察到的变化一致的方式将随机扰动引入模型中。此外，生成对抗网络还可以在只有局部输入的情况下，准确地再现 Lorenz'96 系统的时空相关性和模式。

更进一步地，将约化方法或降维方法结合到 Lorenz'96 系统来探索高维系统的有效动力学是值得研究的方向，这也涉及到 Lorenz'96 系统本身具有时空相关性，从而找到高维系统的低维有效表征。

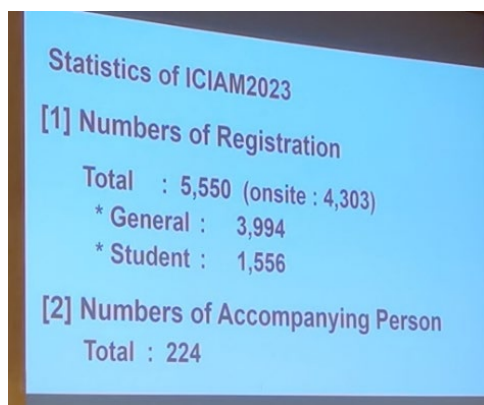


ICIAM 2023 会议总结

——吕力

2023年8月20日至8月25日，第十届国际工业与应用数学大会（ICIAM 2023）在日本东京早稻田大学成功举办。国际工业与应用数学大会（ICIAM）是国际工业与应用数学最高水平与最大规模的盛会。大会由国际工业与应用数学联合会组织，起始于1987年，每四年举办一次，是ICIAM的旗舰会议。ICIAM会议议程包括：颁奖典礼、邀请报告、公众报告、小型研讨会、工业小型研讨会、论文报告、展板报告等。大会为应用数学领域的专家、学者、学生以及工业界代表提供了互相交流与合作的平台，对国际工业与应用数学的发展起着非常重要的推动作用。

本次在东京早稻田大学举办的第十届国际工业与应用数学大会包括27个特邀报告、400多个小型研讨会、800多个 contributed talk 以及300多个海报展示。会议一共有5550人注册，并且有约百分之八十的注册人员来到现场参会，是工业与应用数学领域的一次盛会。能够有机会线下参加这次会议，并与其他专家学者讨论交流，实在是十分地幸运和感激。这次会议开阔了自己的学术视野，增长了自己的见识，是科研道路上的一次非常宝贵的经历。



此次会议在主办方，早稻田大学的相关工作人员的努力下，有条不紊地在各个分会场进行。十分感谢他们的付出，让我们感受到会议的热情与魅力，愉快地度过了这次会议。本次会议令我印象最深刻的是8月21日上午举行的ICIAM会议开幕式，开幕式在早稻田大学的Okuma礼堂举办。当天偌大的礼堂两层都坐满了参会人员，还有很多参会人员站着参与了开幕式。在开幕式上组委会分别颁发了2023年ICIAM Collatz Prize——Maria Colombo，以表彰她在正则性理论和椭圆偏微分方程奇点分析、几何变分问题、输运方程和不可压缩流体动力学方面的重要贡献；ICIAM Lagrange Prize——Alfio Quarteroni，以表彰他在有限元和光谱方法、域分解方法、不连续 Galerkin 方法、不可压缩 Navier-Stokes 方程的数值解、多物理场和多尺度建模方面的开创性工作；ICIAM Maxwell Prize——Weinan E，表彰他在应用数学领域做出的开创性贡献，特别是在机器学习算法的分析和应用、多尺度建模、罕见事件建模和随机偏微分方程等方面。ICIAM Pioneer Prize——Leslie Greengard，表彰他在快速算法方面的开创性工作，包括快速多极方法（20世纪十大算法之一）、快速高斯变换和快速直接求解；以及对微分和积分方程的创新高阶，自动自适应算法的开发。ICIAM Su Buchin Prize——Jose Mario Martinez Perez，以表彰他在研究方面的杰出成就，将解决大规模优化问题的理论、实践、软件和应用相结合，以及促进拉丁美洲优化和应用数学界的发展。ICIAM Industry Prize——



Cleve B. Moler, 以表彰他在解决科学和工程问题的数学和计算工具和方法的发展方面做出的杰出贡献, 以及他发明的 MATLAB。这些获奖者都是值得我们尊重并努力向他们学习的。

会议的几天时光中, 我找了自己感兴趣的一些小型研讨会参加, 也在研讨会上报告了自己的工作, 与他人进行了学术交流, 是一次非常充实的学术体验。下面我将简单介绍几篇在此次会议上听过的相关报告。

● **Quantified overdamped limit for kinetic Vlasov-Fokker-Planck equations with singular interaction forces**

Authors: Young-Pil Choi, Oliver Tse

相关文章: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002203962200314X>

在此报告中, 作者考虑了一类具有非局部相互作用力的动力学 Vlasov-Fokker-Planck 方程的定量化的过阻尼极限问题。这类方程来自于具有相互作用的微观粒子系统, 当系统中的粒子数目足够大时, 得到的一类动力学方程。其中作者考虑 Vlasov-Fokker-Planck 方程中速度和扩散相关的线性阻尼强度足够大时的定量化极限问题。

首先, 作者通过一类粗粒化映射建立中间系统, 定量地估计了 Vlasov-Fokker-Planck 方程的空间密度与该中间系统的密度在 2 阶 Wasserstein 距离下的误差。然后, 作者为 Wasserstein 梯度流推导出了一个类似演化变分的不等式, 使得能够量化中间系统与相应极限方程, 即 McKean-Vlasov 方程之间的误差。结合前两步, 作者建立了动力学方程解与极限方程解之间误差的定量化的显示界限。此外, 作者提出的方法中只需要相互作用势的弱可积性, 因此特别地, 对一些具有奇异相互作用势的聚集-扩散方程, 比如具有静电排斥或吸引力的这类方程, 其动力学 Vlasov-Poisson-Fokker-Planck 系统的量化过阻尼极限问题也得到了解决。

对一些由乘性噪声或环境噪声驱动的微观粒子系统诱导的动力学方程, 能否在某些度量下定量刻画这类方程的误差, 包括奇异相互作用势对应的系统。此时的动力学 Vlasov-Fokker-Planck 方程更为复杂, 适用场景更广泛。

● **Aggregation-Diffusion Equations for Collective Behaviour in the Sciences**

Authors: Jose A. Carrillo, Katy Craig, and Yao Yao

相关文章: <https://arxiv.org/pdf/1810.03634.pdf>

这是 ICIAM Invited Lectures 中的一个报告, 由英国牛津大学的 Jose A. Carrillo 教授带来。在此报告中, Carrillo 教授介绍了自然界中产生涌现现象的一类聚集-扩散方程, 微观系统与宏观系统的联系, 以及对应的极限关系和动力学行为。

生命科学中的许多现象, 从微观到宏观, 都表现出惊人的相似结构。微观层面的行为, 包括离子通道运输、趋化性和血管生成, 宏观层面的行为, 包括动物种群的聚集、

人群的运动和细菌的取向，在很大程度上都是由电、化学或社会相互作用产生的远距离吸引力和耗散或有限尺寸效应产生的短程排斥力驱动的。



从微观模型过渡到连续体描述的一种方法需要分析平均场极限，因为微观粒子的数量变得很大。这些方法都导致个体密度演化的连续体运动学方程，即聚集-扩散方程。这个方程模拟了种群中个体密度的演化，这种演化是由力的平衡驱动的：一方面，扩散项模拟了种群的扩散，其中微观个体逃离了高度集中的个体形成的群，另一方面，由于漂移而产生的聚集力模拟了远距离的吸引/排斥。聚集-扩散方程也可以理解为统计物理中自由能的最陡下降曲线（梯度流）。在某些极端情况下，自由能的最小化会导致系统质量的部分集中。聚集-扩散方程在科学和工程领域有着广泛的应用，比如数学生物学中的细胞群体模型，它们集中起来或从目标分离或通过化学反应相互作用，都会形成对应的聚集-扩散方程。上述扩散效应与种群压力效应是一致的，即细胞群自然地由高浓度区域扩散出去。作者在此报告中概述了对聚集-扩散方程的最新理解和新的结论，以及给出了它们在数学生物学中的应用。

此类聚集-扩散方程是与相互作用粒子系统十分相关的一类方程，通过对它的研究，能更好地理解复杂系统中一些涌现现象的产生，也具有很强的物理意义，值得对这类方程在不同条件下的情形进行研究，比如奇异相互作用势，随机因素对系统的影响等等。

● Stochastic maximum principle for weighted mean-field system

Authors: Jie Xiong, Yanyan Tang

相关文章: <https://www.aims sciences.org/article/doi/10.3934/dcds.2023011>

在此报告中，作者考虑了一类加权的平均场系统，基于此系统，考虑其上面的最优控制问题。这类最优控制问题的一个新特点是系统的系数依赖于状态过程及其加权测度和控制变量。这是与传统的最优控制问题有区别的地方。作者利用变分问题上的一些技术，建立了此类系统的随机极大值原理，并建立了最优性结果产生的充分条件。并且作者研究了保险公司资产负债管理问题的最优保费政策，来作为理论结果的应用。

此报告的方法将平均场系统与最优控制问题结合，得到了理论上的一些结果，并且有实际的应用场景，值得学习和探讨。



● Fluid limits from Quantum Boltzmann equation

Authors: Ning Jiang, Linjie Xiong, Kai Zhou

相关文章: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039621006860>

在此报告中, 作者研究了 Boltzmann-Fermi-Dirac 方程, 此方程用来描述考虑量子效应的稀疏气体的演化, 是对经典 Boltzmann 方程的一类修正。此方程中考虑了泡利不相容原理, 也被称为 Uehling-Uhlenbeck 方程或者 Nordheim 方程。在这类系统中, 气体分子通过弹性二元碰撞相互作用, 碰撞前后保持动量和能量守恒。

在报告中, 作者通过新的方法得到了碰撞积分中三线性项的新估计, 从而利用此估计证明了 Boltzmann-Fermi-Dirac 方程经典解在接近平衡时的全局存在性。除此之外, 作者从 Boltzmann-Fermi-Dirac 方程出发, 严格地证明了此方程的流体力学极限为不可压缩的 Navier-Stokes-Fourier 方程。

目前研究一般的奇异相互作用势的 Interacting particle system 中粒子发生碰撞后的演化是一件比较困难的事情。上面报告中的 Boltzmann-Fermi-Dirac 方程虽然是描述稀疏气体演化的方程, 但其中的方法和思想对一般的带弹性碰撞的 Interacting particle system 也有一定的启发意义, 或许能提供技术上的指导。

● Systems with Riesz Interactions in the Mean-Field Regime

Authors: Matthew Rosenzweig, Sylvia Serfaty

相关文章:

<https://projecteuclid.org/journals/annals-of-applied-probability/volume-33/issue-2/Global-in-time-mean-field-convergence-for-singular-Riesz-type/10.1214/22-AAP1833.short>

在此报告中, 作者考虑了加性噪声驱动的随机 Interacting particle system, 其中系统中的相互作用势为 Riesz 类型的奇异相互作用势能, 相互作用势中参数的取值范围依赖于系统的维数。对此 Singular 的随机 Interacting particle system, 作者利用 modulated-energy 方法证明了从此随机 Interacting particle system 收敛到极限偏微分方程的时间一致的定量收敛速率, 即时间一致的平均场极限。此结果是第一个在奇异相互作用势下对保守系统和梯度流系统均有效的结果。证明方法基于对之前的 modulated-energy 方法的改进, 使得 modulated-energy 的时间导数的系数因子都能被极限分布的衰减界限来控制, 从而得到时间一致的收敛速率。

具有奇异相互作用势的随机 Interacting particle system 更加具有物理意义, 如库伦相互作用势, 引力势均为奇异的相互作用, 因此这类系统受到更多的关注。此报告中的结果为研究其它类型的奇异随机 Interacting particle system 打下了基础, 如乘性噪声驱动的系统, 或者其它非高斯随机噪声驱动的系统。



ICIAM2023 会议总结

——王子博

第十届国际工业与应用数学大会（ICIAM2023）于8月20日至8月25日在日本东京早稻田大学举办。本次会议是应用数学领域的一次盛会，会议包括27个特邀报告、400多个小型研讨会、800多个 contributed talk 以及300多个海报展示。几千名应用数学领域的工作者参与了本次会议，不同领域的工作和思想都在本次会议中展现和碰撞。我非常幸运的能够在线下参加此次大会。

8月21日上午，ICIAM会议开幕式在早稻田大学的Okuma礼堂举办。开幕式上分别颁发了ICIAM先锋奖——Leslie Greengard, Collatz奖——Maria Colombo, 拉格朗日奖——Alfio Quarteroni, 麦克斯韦奖——Weinan E, 苏步青奖——Jose Mario Martinez 和工业奖——Cleve B. Moler. 其中工业奖的获得者Cleve B. Moler是MATLAB软件的发明者，MATLAB软件是我在本科时初次接触到计算数学的工具，作为一名MATLAB的使用者，见到软件的发明者也使我切实感受到了技术的发展和进步。

接下来的几天，来自不同领域的报告在各个分会场中紧张有序地进行。我也在本次会议上报告了自己的工作，与他人交流研究。参加本次会议拓宽了我的视野，是一次充实的学术体验。



ICIAM2023 会议报告总结

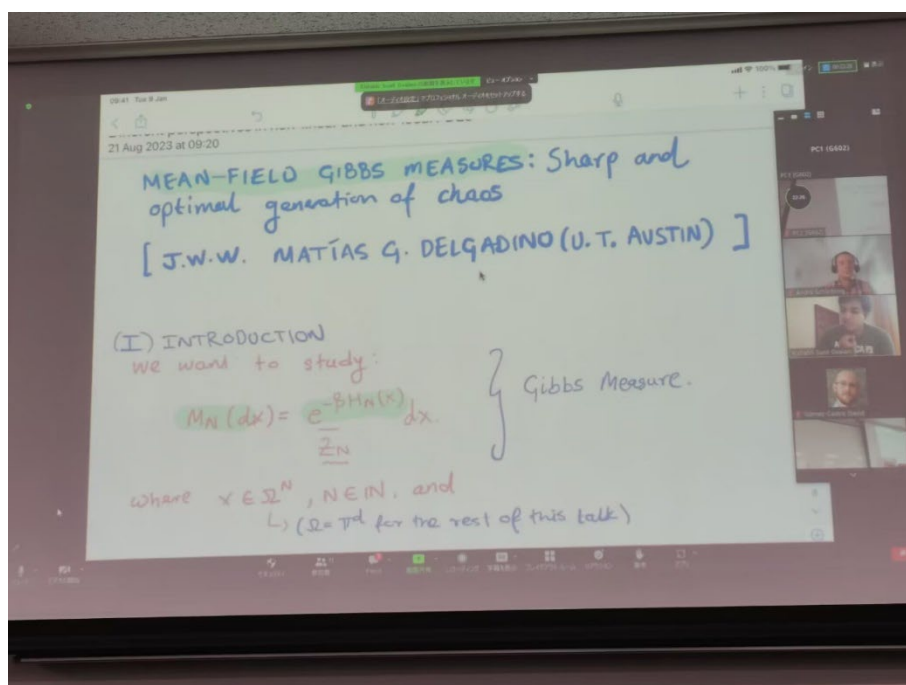
- **Sharp uniform-in-time propagation of chaos on the torus**

在这个报告中，来自 Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences 的 Rishabh Sunil Gvalani 教授介绍了环面上带有梯度漂移项的弱相互作用扩散的时间一致混沌传播。



由于相互作用势的周期尺度与扩散尺度之间的差异，系统中自然地产生了尺度分离。因此报告人关注于均匀化和平均场极限之间交换对系统产生的影响。他们证明了如果环面上的平均场系统存在一个相变，即它存在一个以上的稳态，那么系统的均匀化极限和平均场极限将不能交换。这类系统的一个典型例子是带有噪声的 Kuramoto 模型。同时，报告中也分析了围绕平均场极限的涨落的中心极限定理，并推导出了在临界温度以下，吉布斯测度收敛到平均场能量的唯一极限的最优速率。

在这项工作中，报告人也同时考虑了相互作用粒子系统的均匀化极限和平均场极限，通过这个报告我了解到均匀化极限和平均场极限是否能交换顺序与系统的稳态解之间存在联系。因此，考虑相互作用粒子系统的稳态解，也即系统的长时间行为是非常重要的。



- **Strong convergence of propagation of chaos for McKean-Vlasov SDEs with singular interactions**

在这个报告中，来自 Bielefeld University 的郝子墨介绍了具有奇异 L^p 相互作用核的 McKean-Vlasov SDEs 的粒子近似的混沌传播的强收敛性，以及在粒子轨迹水平上中等相互作用粒子系统混沌传播的强收敛性。对于具有奇异相互作用的粒子系统，建立 SDE 的强适定性是一个主要的困难之一。对于这个问题，报告人使用了 Zvonkin 变换、热核估计等方法得到了奇异 L^p 相互作用核的 McKean-Vlasov SDEs 的强适定性。由此结合经典的鞅问题方法可以得到弱意义下的混沌传播。同时报告人也给出了此种方法与 Jabin 和 Wang 在 2018 年提出的相对熵方法对有界相互作用核得到的定量混沌传播的对比。最后，在弱意义下的混沌传播的基础上，报告人使用了 Zvonkin 变换的方法得到了



强收敛性。

在这项工作中，报告人对粒子系统混沌传播的两种方法——鞅问题方法和相对熵方法进行了详细的介绍，这两种方法在粒子系统混沌传播问题上各有优势，但它们之间同时也有联系。尽管这项工作得到了具有奇异 L^p 相互作用核的相互作用粒子系统混沌传播的强收敛性，但它不完全包含相互作用核是非李普希兹的情形。同时，这项工作处理的 McKean-Vlasov SDEs 的解是具有密度函数的，对于只具有分布意义的弱解的 McKean-Vlasov SDEs（例如具有退化噪声 McKean-Vlasov SDEs）的情形并不包含在讨论范围内。因此相互作用粒子系统的混沌传播问题还是一个没有完全解决的问题。

● **Nonlocal approximation of nonlinear diffusion equations**

在这个报告中，来自 UCLA 的 Jeremy S.-H. Wu 教授介绍了他和合作者在非线性扩散方程的非局部逼近方面的工作。非线性扩散方程在现实世界中无处不在，它们可以用于分析多孔介质中的气体膨胀、地下水渗透和等离子体的热传导等。他们证明了退化的（局部）非线性扩散方程可以由一类非局部偏微分方程的渐进极限得到。这些非局部方程可以由类相互作用能量的梯度流近似内部能量得到的。通过构造一系列弱测度解的极限，他们证明了在非常一般的假设下，非局部近似方程的弱解收敛到原局部方程的弱解。作为这个结果的一个推论，他们发展了一种确定性粒子的方法，用来数值逼近非线性（局部）扩散方程的解。

在这项工作中，报告人构造了一系列非局部偏微分方程来逼近退化的非线性（局部）扩散方程，由此产生了一个计算非线性（局部）扩散方程的粒子系统数值方法。这表明可以通过粒子系统理论构造数值方法来计算偏微分方程。

● **Identification of variational principles, symmetries, and conservation laws from data**

在这个报告中，来自 Paderborn University 的 Christian Offen 介绍了基于李群理论的框架来学习动力系统的变分原理的工作。总所周知，一个不受外力约束的物理系统的行为可以通过 Lagrange-d'Alembert 原理得到。如果已知系统的 Lagrange 量，系统的位置和速度将会从初值开始沿着 Euler-Lagrange 方程的描述发展。等价地，如果已知系统的 Hamilton 量，我们也可以用品则方程来描述该系统。为了学习系统的行为，不仅可以直接识别运动方程，也可以通过识别 Hamilton 量或 Lagrange 量来定义它们。基于这个想法，Greydanus 等人在 2019 年提出了 Hamiltonian Neural Network (HNN)，接着 Cranmer 等人在 2020 年发展了 Lagrangian Neural Network (LNN)。

报告人改进了前人的工作，提出了一种 Discrete Lagrangian Neural Network (DLNN) 算法。这种方法在一个神经网络中同时包含了变分积分和向后变分误差，并且在成本函数中引入了一个额外的退化项来避免学习退化的 Lagrange 量。这种算法可以有效地避免数值误差。另外，报告人提出了 Symmetric Discrete Lagrangian Neural Network



(SymDLNN) 算法来学习系统的守恒量对称量。更准确地来说，这种方法是通过引入一个框架，对于构型空间上给定的李群，识别出一个通过对称作用的子群，然后通过构造 momentum map 得到守恒量。通过数值实验可以发现，这两种新方法是对先前提到的方法的改进。

● Aggregation-Diffusion Equations for Collective Behaviour in the Sciences

会议的最后一天，来自牛津大学的 José A. Carrillo 教授做了题为科学中集体行为的聚集-扩散方程的受邀报告。聚集-扩散方程是描述平均场尺度下相互作用的微观粒子系统对应的自然宏观模型，其平衡态和定性行为都包含丰富的现象。在这个报告中，Carrillo 教授首先介绍了聚集-扩散方程以及其在数学生物学中的一些具体例子，例如 Keller-Segel 模型，Fisher-KPP 模型等。在这些模型中包含了丰富的动力学现象，如亚稳态、平衡态、相变和分岔等。这类方程也可以理解为自由能的极小化问题。通过连续的 Steiner 对称化技术，可以证明所有具有适当正则性的稳态都是径向对称的。利用变分法的技术，可以说明稳态之间的全局极小值的存在性，这也即说明了聚集-扩散方程的稳态的唯一性。在没有扩散且不保证径向对称的情形下，Carrillo 教授也介绍了他们的最新工作。最后 Carrillo 教授介绍了聚集-扩散方程中的质量集中现象。在快速扩散范围内具有齐次吸引核的聚集-扩散方程的稳态解能够发生部分质量集中的现象，这也是通过证明自由能在某些概率测度中存在径向全局最小值的方法得到的。

通过这个报告我了解到相互作用粒子系统对应的宏观模型具有丰富的动力学行为可以探索，可以使用变分学的方法通过极小化自由能来研究这类问题。在自然界中还有更多的能够应用粒子系统模型的问题如等离子体物理、神经科学、集体行为、全局优化、机器学习等都是值得研究的问题。





ICIAM2023 会议总结

——肖望

这次 ICIAM 会议汇集了来自不同领域的顶尖科学家，他们在各自的研究领域中取得了令人瞩目的成果。从三个特邀讲座的主题来看，会议着重介绍了人工智能在科学研究、流体动力学中的异常耗散以及从线性到非线性简化建模方面的最新进展。

首先，人工智能在科学研究中的应用引起了广泛关注。通过深度学习算法和大规模数据集，科学家们能够更好地利用物理学基本原理和实验数据，推动科学的发展。例如，在基因组学研究中，人工智能帮助科学家们更好地理解基因与疾病之间的关联，加速了新药开发和个性化医疗的进展。在天文学、材料科学和气候科学等领域，人工智能的应用也取得了显著的成果，提高了研究效率和准确性。

其次，流体动力学中的异常耗散是一个引人注目的研究领域。研究人员通过 Kolmogorov 的 K41 湍流理论对异常耗散现象进行了定量预测，并探索了非线性效应对 Navier-Stokes 方程湍流解与欧拉方程不规则解之间关系的影响。这项研究对我们理解湍流现象的复杂性和不可预测性提供了深入的洞察，为天气模拟、工程设计等领域的应用提供了重要指导。

最后，从线性到非线性简化建模是一个重要而挑战性的任务。研究人员通过线性归约建模和非线性归约建模来简化复杂的数学模型，以加快求解过程或减少计算资源的使用。这些技术在流体力学、材料科学和生物学等领域具有广泛的应用，有助于理解非线性行为和系统中的关键特征，并提供预测、设计和优化方案。

我印象深刻的是大会中的一些特色活动和展示。例如，会议期间举办了一系列的专题研讨会和研讨会，邀请一些知名专家分享他们的研究成果和经验。此外，还有一些行业领先企业设置了展台，展示了他们在工业应用数学方面的创新产品和解决方案。这些活动给与会者提供了富有启发性的交流和合作的机会，促进了学术界与工业界的合作，也为进一步推动工业应用数学的发展提供了平台。

这次大会不仅满足了与会者们的学术交流需求，也给我们带来了一些难忘的社交体验。会议期间，我们有机会结识来自世界各地的同行，并与他们建立起宝贵的人际关系，与其他与会者进行深入交流，拓展我们的合作网络。

总的来说，这次 ICIAM 会议内容丰富多样，涉及了基础科学和实际应用的众多领域，展示了科学家们在不同领域中的卓越成就。这次会议为科学研究的进步提供了重要的交流平台，同时也为我们提供了深入思考和探索的机会。我期待在将来的研究中能够应用会议上学到的知识和技术，不断推动科学的发展和实际应用。



● ICIAM Maxwell 奖讲座

Weinan E, 人工智能科学研究所, 北京大学

多年来, 缺乏优秀的算法一直是制约科学研究的一个问题, 而深度学习提供了解决这个问题的工具。这种工具使我们能够更好地利用物理学基本原理和实验数据, 推动科学的发展。人工智能不仅令科学家们能够处理维度诅咒问题, 还促进了科学研究的重大进展。它提供了处理大规模和复杂数据的能力, 帮助科学家们挖掘数据中的模式和趋势。这种能力为研究人员提供了更全面、准确的信息, 加速了科学发现的进程, 并且可能揭示了以往被忽视的关联性。通过机器学习, 我们能够处理更加庞大的数据、更加复杂的模型和更大规模的计算量, 这为科学家们带来了更广阔的研究领域。

报告人在谈到人工智能在科学研究中的影响时, 给出了一些具体的例子:

基因组学研究: 人工智能在基因组学研究中发挥了重要作用。通过深度学习算法和大规模基因数据集, 科学家们能够更好地理解基因与疾病之间的关联, 识别出对特定疾病易感性的基因变异。这项技术的应用有助于加速新药开发和个性化医疗的进展。

天文学研究: 人工智能在天文学领域也发挥着关键作用。通过分析大量的天文图像和数据, 深度学习算法能够帮助科学家识别星系、行星和其他宇宙现象, 并进行分类和归纳。这种自动化的图像识别和数据处理技术极大地提高了天文学研究的效率和准确性。

材料科学研究: 人工智能在材料科学领域的应用也日益增多。通过机器学习算法, 科学家们能够预测材料的性质和行为, 以及寻找新的材料组合和结构。这使得材料设计和开发的过程更加高效, 并且有助于推动能源、电子、医疗等领域的创新。

气候科学研究: 人工智能在气候科学研究中具有巨大潜力。通过分析海量的气象数据和模拟模型, 人工智能可以帮助科学家们预测天气变化、研究气候模式, 并提出更精确的气候预测。这有助于改进气候变化建模和理解气候系统的复杂性。

这些例子只是人工智能在科学研究中的应用的一小部分。随着技术的不断进步和算法的不断优化, 人工智能将继续为各个学科领域带来更多的突破和创新。

最后, 报告人告诫我们应该保持谨慎。尽管人工智能为科学研究带来了巨大的机遇和挑战, 但它仍然是工具, 需要由科学家们正确应用。我们需要充分理解人工智能的局限性, 并在使用过程中注意数据的可靠性和算法的公正性。总的来说, 人工智能科学革命对科学研究产生了深远的影响。它提供了解决维度诅咒问题的工具, 推动了科学的发展和进步。然而, 我们仍然需要谨慎行事, 确保人工智能在科学研究中的应用是可靠和合理的。

这个报告让我深受启发, 我目前做的 Navier-Stokes 流体问题就是一个需要处理大规模和复杂数据的问题, 第一篇文章是用经典数值方法去做的, 耗时长, 效率较低, 报告所讲的人工智能的优势坚定了我用人工智能去做 Navier-Stokes 流体问题的信念和信心。



● ICIAM Collatz 奖讲座

流体动力学中的异常耗散

Maria Colombo, 瑞士洛桑理工学院

Kolmogorov 的 K41 湍流理论是对不可压缩流体中异常耗散现象的定量预测。这一现象表明，在湍流中，尽管保留了动能，能量会转移到高频并以异常方式耗散。这引发了我们对于 Navier-Stokes 方程湍流解与欧拉方程不规则解之间关系的深入研究。

这次演讲介绍了这一研究的最新进展，并重点探讨 G.Crippa 和 M.Sorella 的联合工作。他们考虑了被动标量平流的情况，并应用标量湍流的 Obukhov-Corrsin 理论来预测异常耗散。他们研究了在超临界 Obukhov-Corrsin 正则域中出现异常耗散的速度场和被动标量的构造。这种研究不仅回答了在扩散率消失的情况下被动标量平流选择的问题，还提供了探索超临界 Onsager 正则域中强迫 Navier-Stokes 方程异常耗散的例子。

这些研究的意义在于推动了对湍流现象的进一步理解。人们对湍流的复杂性和不可预测性一直感到困惑，而这些最新进展为我们提供了更深入的洞察力。通过研究湍流中的异常耗散现象，我们可以更好地理解能量转移和动能减少等关键问题。

具体而言，这些研究可以引发其他领域的相关探索。例如，在气象学中，对大气湍流的研究有助于提高天气模拟和预测的准确性。在工程领域，湍流现象对于设计高效的涡轮机、飞行器和管道系统等也具有重要意义。虽然我做的 Navier-Stokes 方程没有涉及到湍流和异常耗散问题，但 Kolmogorov 的 K41 湍流理论以及与 G.Crippa 和 M.Sorella 的联合工作拓宽了我的学术边界，给我的下一步提供了一个可能的方向，为我们提供了深入研究湍流中异常耗散现象的机会。这些进展不仅推动了科学理论的发展，还为实际应用提供了重要的指导和启示。

● ICIAM 特邀讲座

从线性到非线性简化建模：理论与算法

Albert Cohen, 法国索邦大学

简化建模技术在参数化偏微分方程 (PDE) 的求解和反问题中具有重要作用。这个报告首先回顾了与线性归约建模相关的概念和算法，例如 Kolmogorov 宽度和归约基、适当的正交分解等。

线性归约建模是利用线性方法来简化复杂的数学模型，以加快求解过程或减少计算资源的使用。通过适当的正交分解，我们可以将原始的多维问题转化为一组相互独立的一维问题，从而降低了计算的复杂性。然而，在实际应用中，很多问题都涉及到非线性的现象。因此，我们需要开发类似的工具和策略来进行非线性归约建模。这些工具可以帮助我们揭示系统中的关键特征并简化复杂的计算。



具体而言，非线性归约建模在许多领域都具有广泛的应用。例如，在材料科学和生物学等领域，复杂的非线性行为常常是研究的焦点。通过开发适用的非线性归约建模工具，我们可以更好地理解这些系统的行为，并提供预测、设计和优化方案。

总之，从线性到非线性归约建模的研究是一项重要而挑战性的任务。它为我们提供了在求解复杂数学模型时的便利和有效性。通过这些技术应用于不同领域的实际问题，我们可以不断提升科学理论的发展和实际应用的水平。

通过这个报告，我发现在流体力学中，对于涡旋流动或湍流现象的建模需要考虑非线性效应，通过对非线性系统进行合理的简化，更好地理解流体中的运动规律，并从中得到重要的工程设计指导。

● 囊泡生长或收缩的相场模型

Shuwang Li, 伊利诺伊理工学院

李老师提出了一个描述囊泡生长或收缩的扩散界面模型，该模型涉及渗透压的作用。该模型由 Allen-Cahn 方程和 Cahn-Hilliard 方程组成，分别描述相场演化和浓度场演化。通过共同的切线结构，研究人员建立了控制囊泡扩张或收缩的条件。数值实验表明，这个模型能够很好地捕捉到囊泡动力学的主要特征。具体来说，它可以模拟圆形（膨胀）和指状（收缩）囊泡的形成。

这项研究对于理解生物系统中囊泡的形成和调控机制具有重要意义。例如，在细胞生物学中，细胞内部的囊泡形成过程是细胞运输、信号传导和细胞吞噬等关键过程的基础。通过建立有效的数学模型，我们可以更好地探索这些生物过程的本质，并推动相关领域的研究和应用。类似地，这个扩散界面模型也可以应用于其他领域，如材料科学和化学工程等。在材料科学中，囊泡的形成和收缩过程与多相材料的制备和性能密切相关。通过研究囊泡的动力学行为，我们可以有针对性地设计和优化新材料的结构和性能。

总的来说，李老师的这个工作与我做的囊泡起皱动力学都属于对囊泡性能的研究，与我用的浸入边界法一样，这个扩散界面模型也是一个强大的工具，用于研究和模拟囊泡的生长和收缩过程。通过深入理解这些过程的物理原理和数学描述，我可以更好地揭示生物和材料系统的行为，启发相应的想法，并为相关领域的应用提供指导和启示。

● 线性粘弹性流体中颗粒产生的扰动流

Xiaofan Li, 伊利诺伊理工学院

研究人员使用了空间中具有三阶精度的精确边界积分方法来计算流体动力学，以研究运动粒子对流体的影响。该方法的一个独特之处在于能够计算具有指定颗粒速度分布的颗粒表面上的应力。在牛顿流体中，边界层是指在振荡运动下沿着无限平板发展的现象。然而，当流体变得粘弹性时，边界层的行为与牛顿流体中观察到的边界层有根本的



不同。这意味着粘弹性流体中的粒子对流体的影响可能会导致与牛顿流体中不同的流动特征和物理现象。

这项研究对于理解粒子与流体相互作用的基本原理和流体动力学的非牛顿行为具有重要意义。例如，在生物医学领域，研究血液循环中红细胞对血液流动的影响对于理解血液的输送和循环过程至关重要。通过研究红细胞和其他微粒在粘弹性流体中的运动行为，我们可以更好地理解血液的流变学特性，并推动心血管疾病的治疗和预防方面的研究。

此外，在材料科学和化工领域，粘弹性流体中颗粒对流体的影响也是一个重要的研究方向。例如，通过研究悬浮颗粒在分子溶液中的行为，我们可以设计出更有效的胶体材料或者开发新的粘弹性流体的应用。

总体而言，这个研究提供了一种可靠的方法来研究运动粒子与粘弹性流体之间的相互作用。通过深入理解非牛顿流体的流动行为和物理现象，我们可以在生物医学、材料科学和化工等领域推动科学进步，并开发出更具应用价值的技术和材料。

李老师是将粒子的运动方程转换到傅里叶空间中，推导出比较简便的形式，再用边界积分方法去求解。我在做的两个课题也设计到傅里叶变换和边界积分方法，所以听李老师的报告时倍感亲切，李老师转到傅里叶空间去简化方程形式的想法给了我启发，这也和傅里叶网络算子转到傅里叶空间去推导计算的想法类似，有必要的話，我也将我的研究往这方向思考，应该是能简化问题或提高计算效率的。



ICIAM 总结

——杨璐璇

此次日本之行中，印象最深的五个报告有：《Stochastic Gradient Descent: Understanding Adaptive Step-sizes, Momentum, and Random Initialization》、《AI for Science》、《Solving Parametric PDEs by Deep Learning》、《Sparse Kernel Flows for Learning 132 Chaotic Dynamical Systems from Data》、《Learning high-dimensional feedback laws for collective dynamics control》。

首先是《Stochastic Gradient Descent: Understanding Adaptive Step-sizes, Momentum, and Random Initialization》，其报告人为 Rachel Ward 教授。她主要谈及了梯度更新算法在非凸优化与初始化、自适应更新学习率算法以及动量这三方面的最新理论进展。对于非凸优化中的初始化选择这一部分，她提及了两类新颖的方法即矩阵分解和张量分解。通过矩阵分解，她研究了梯度下降法在低秩矩阵分解目标上的收敛性。她通过设初始化 X_0 在初始因子矩阵 A 的列空间中，观察到随着梯度下降的进行，因子之间越来越多地共享 A 的条件数，从而导致不平衡的初始因子矩阵变得更加平衡，最终证明了梯度下降法呈线性收敛。由矩阵很容易地想到过渡到张量，因此她又证明了张量分解下梯度下降收敛性。接着她考虑了学习率以及在梯度更新上加动量对于梯度下降的影响。她得到当学习率越大时，下降速度越快的结果以及对于二次优化中，如果 mini-batch 的大小大于临界大小，则 mini-batch 动量保持了 full-batch 动量的快速收敛速度。因此在未来，她们将会考虑将 mini-batch 动量和自适应更新学习率与梯度下降法三者进行融合。

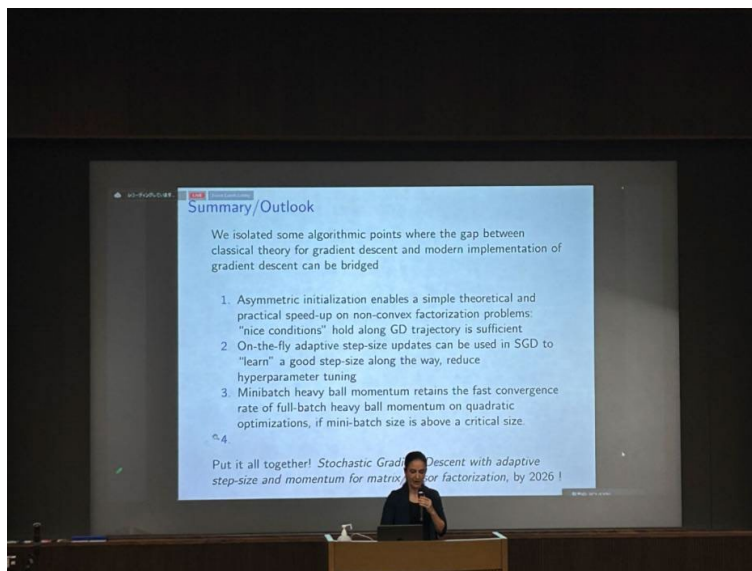


图 1: Rachel Ward 教授报告现场图

第二篇报告《AI for Science》是由鄂维南老师进行介绍。鄂老师提到经典的算法已经无法很好地解决高维问题。但神经网络可以做到。神经网络目前广泛地应用于图像识别领域，而图像识别就是一个高维的函数，因此从数学的意义上来说，深度学习提供了



一个逼近高维函数的工具。鄂老师提到可以用神经网络解决分子动力学问题和高维控制问题。如将分子动力学与神经网络结合，可用于同时执行原子和电子行为的有限温度模拟。还有一个鄂老师提到的重点是数据采样。他提到自适应采样有利于提高训练集优化模型效果。

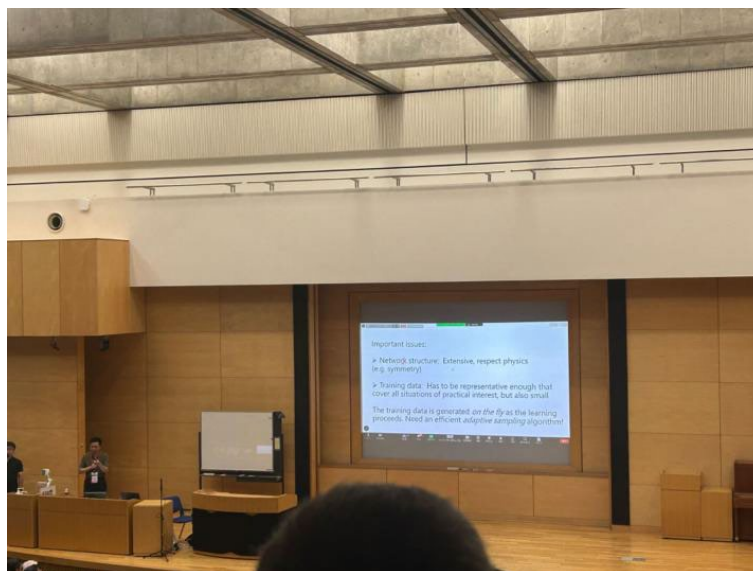


图 2：鄂维南教授报告现场图

第三篇报告《Solving Parametric PDEs by Deep Learning》是来自董斌老师的工作。他提到了可以利用元自解码器（MAD）来构造一个非线性试验流形。同时基于元学习的概念，可以在预训练阶段以无网格和无监督的方式学习试验流形。通过搜索这个试验流形，可以快速适应新的（可能是异构的）PDE 参数，同时还可以对试验流形进行微调。但目前 MAD 这个算法比起传统解 PDE 的数值方法来说速度上仍欠佳，董老师提到或许可以从扩大任务规模或者增加神经网络复杂度或者改变损失函数进行进一步改进。

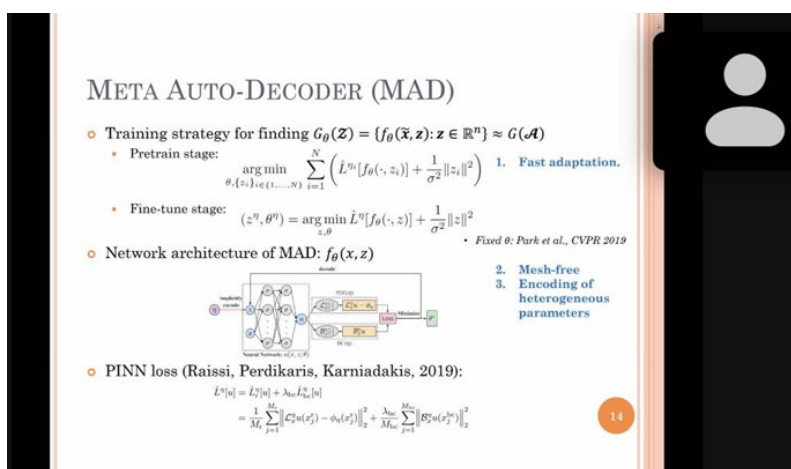


图 3：董斌教授报告现场图

第四个报告《Sparse Kernel Flows for Learning 132 Chaotic Dynamical Systems from Data》主要是讲的从数据中学习动力系统，由杨璐进行介绍。她提到从数据中学习动态系统的一种简单且可解释的方法是用自适应数据的核来插值其向量场，其中该核可以通过核流来学习。因此她们的工作中引入稀疏核流的方法，从一个大的核字典中学习“最佳”核，并基于该核学习 132 个混沌系统。对于这 132 个混沌系统，她采用由 21 个元素核组成的线性组合作为核函数，并利用设定的损失函数和结合 SGD 算法优化线性组合中的参数，最终学出最佳核。该场报告中，她所提到的利用核来插值的想法，实际上是一种确定性插值的办法。在 Eric 的文章中有提到，随机插值的方法比确定性插值效果更为优越，因此是否可以随机化核插值是可以考虑的一个方向。

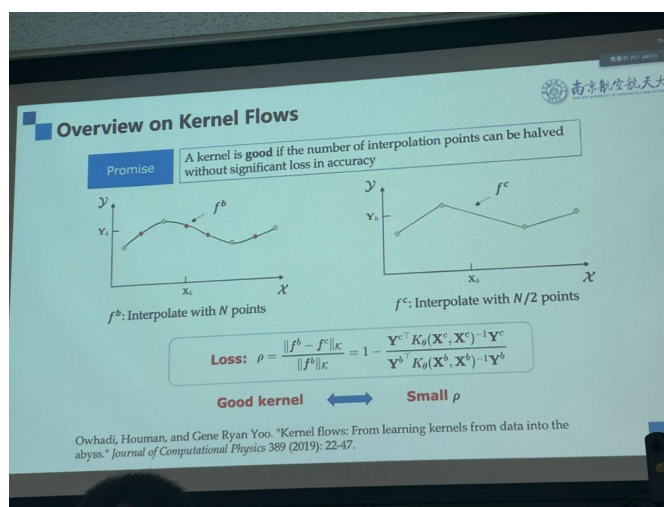


图 4：杨璐报告现场图

第五个报告《Learning high-dimensional feedback laws for collective dynamics control》主要是介绍高维情形下利用监督学习解决闭环最优控制问题。报告人 Dante Kalise 从 HJB 方程引入，得到最优控制问题所需要优化的式子，并提出了一种基于离散时间状态相关 Riccati 方程和神经网络的监督学习方法。基于监督学习，他们利用非线性动力学稳定反馈律去逼近计算方法，其中他们的训练数据来源于状态相关 Riccati 方程 (SDRE) 的逐点解。在这个工作中他们研究了前馈神经网络对反馈控制的逼近，分析了不同的训练结构和损失函数的选择。最终计算结果表明，对于高维非线性问题，通过神经网络可以有效地逼近 SDRE 反馈律，从而消除了对实时闭环控制的快速求解器的严格要求。在实验过程中，他们也观察到对于真正的非线性控制问题，例如基于智能体的动力学，通过直接从 SDRE 解中学习反馈控制器可以获得更好的结果。然而，对于线性结构更为突出的问题，例如在半线性抛物型偏微分方程的控制中，学习值函数 $V(x)$ 的局部逼近模型并从其梯度计算控制更为准确和有效。

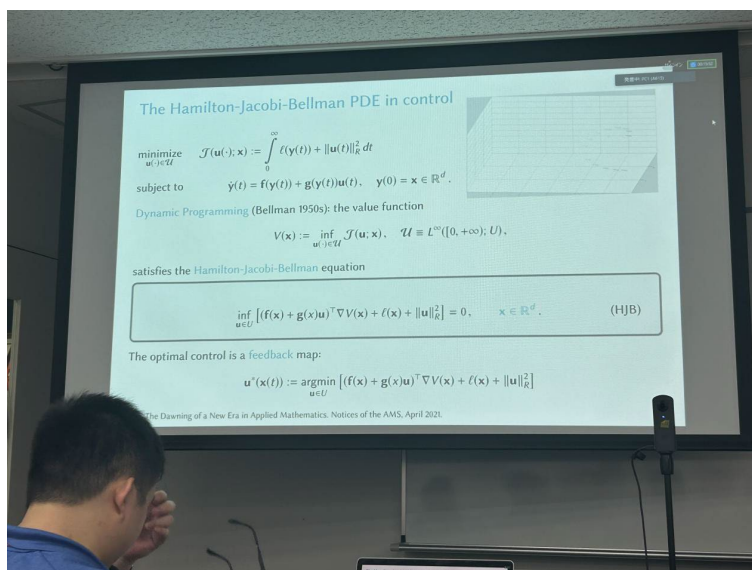


图 5: Dante Kalise 教授报告现场图

通过这五个报告，我的主要收获有：1、关注自适应算法。自适应算法对于梯度下降和采样质量有较好地提升效果。2、关注高维最优控制问题和闭环最优控制问题。3、关注对于最优控制问题比较重要的状态相关 Riccati 方程。4、梯度算法无论是在学习动力系统或者求解最优控制问题中，都起到了一定的作用，因此未来可以进一步关注优化算法。5、目前插值问题还停留在确定性的，如果出现了随机插值的方法，或许可以进一步提高从数据中学习动力系统的效果。



➤ 28th International Conference on Statistical Physics, Statphys28. Time: August 7th-11th, 2023

YITP-YSF 报告总结

——方程

Numerical sampling rare of rare trajectories using stochastic bridges

*Raul Toral

(1. IFISC (Institute for Cross-disciplinary Physics and Complex Systems), UIB-CSIC)

Keywords: Rare trajectories, Stochastic bridges, Numerical simulation of trajectories, Stochastic processes

相关文献: <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.105.064138>

随机系统中稀有事件往往是最重要的，例如流行病的消退、生态学中物种的灭绝、生物开关的动力学、布朗粒子从双井势中逃逸、化学反应中的大波动，以及检测或预测罕见自然灾害，如地震、风暴或暴雨。这些应用的广泛范围证明了近年来在随机现象模型中开发稀有事件采样算法的必要性。

本报告提出了一种量化随机过程中稀有事件统计特征的新方法。该方法的核心组成部分是一个反向时间的过程，它生成连接所需起点和终点的随机桥，能够将更多的处理能力集中在目标随机过程的罕见事件上，同时保留这些稀有轨迹的统计特征，例如首次通过时间。

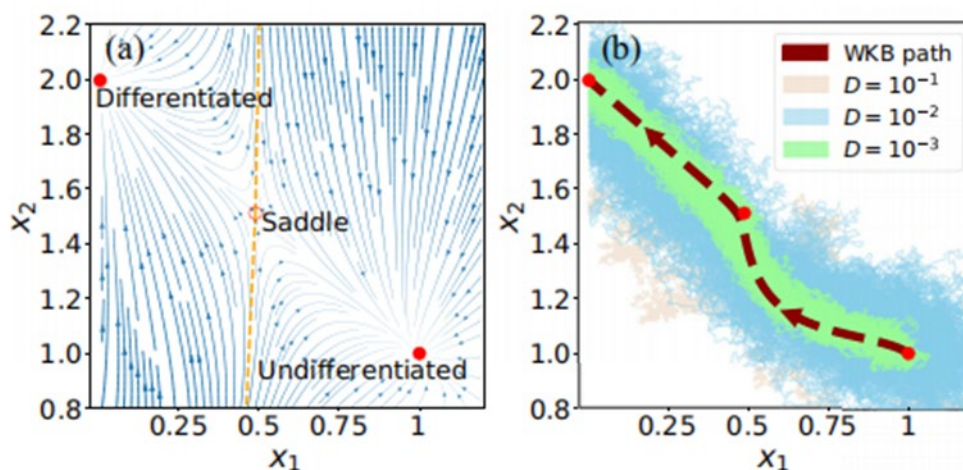
该作者将所生成的随机桥与目标过程的温兹尔-克拉默-布里渊 (Wentzel-Kramers-Brillouin, WKB) 最优路径进行比较，发现在小噪声水平时，符合目标过程统计特性的生成路径会收敛到 WKB 最优路径。该方法本身不需要小噪声的限制，且生成的随机桥和 WKB 最优路径之间的比较使我们能够评估 WKB 结果的准确性。

文中提到了细胞分化模型：

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1^n}{S^n + x_1^n} + \frac{S^n}{S^n + x_2^n} - x_1 + \sqrt{2D}\xi_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2^n}{S^n + x_2^n} + \frac{S^n}{S^n + x_1^n} - x_2 + \sqrt{2D}\xi_2(t)$$

下图展现了该系统的相图(左)、提出方法的转移路径统计结果和 WKB 结果(右)。



本报告所说的转移路径是从转移概率角度考虑的，包括离散时间和连续时间。通过构造两个亚稳态点随机桥，从统计特征下复现了和 WKB 最优路径相似的结果，但没有受到噪声水平的限制。可能的扩展方向包括双稳态到多稳态的过渡，更复杂的动力学行为研究。该报告提到的随机桥还是限制在高斯噪声驱动的，Lévy 桥可能适用于 Lévy 噪声驱动的随机过程。



YITP-YSF 报告总结

——冯灵羽

A Nonlinear Fluctuation-Dissipation Test for Markovian Systems

Dima Boriskovsky (Tel-Aviv University)

Markovian systems are an important class of stochastic models that can describe systems both in and out of thermal equilibrium. Determining if some time-series data are Markovian is a crucial first step in model building for nonequilibrium systems. One approach relies on generalized fluctuation-dissipation relations, which connect the internal spontaneous fluctuations of a system with its response to an external perturbation. However, in many specific applications, the typical limited amount of experimental data is insufficient to conduct a proper test. Here, they show how to overcome this challenge and enhance the ability to detect non-Markovian behavior in time-series data.

Specifically, they present a generalized nonlinear fluctuation-dissipation relation, which applies for Markovian systems that can be perturbed with a step stimulus of arbitrary strength. Previously suggested fluctuation-dissipation relations are based on the linear response of a system and require many measurements. A nonlinear relation holds for systems that are out of equilibrium and for strong external perturbations. Therefore, its verification requires less data than the standard linear relation. Using this nonlinear relation, they test for Markovian dynamics with as little as half the amount of data typically required in a couple of model theoretical systems and in an experimental system.

Their main result is the validation of the nonlinear fluctuation-dissipation relation and the resulting substantial reduction in the number of trials required to test for Markovianity in all three systems as compared to the linear fluctuation-dissipation relation. In addition, we show that there is an optimal value of perturbation that provides the most sensitive test for Markovianity. The main element for testing, a perturbation in the form of a step stimulus, is already part of many experimental standard protocols for nonequilibrium systems. The method could be used to reinspect systems for which linear-response-based fluctuation-dissipation theorems have been tested in the past.

The idea can be extended to other stochastic nonequilibrium systems and to multidimensional systems. The work lays the foundation for a simple, model-free, experimental classification of diverse nonequilibrium systems in terms of their Markovian dynamics. Also, the required statistics might be further minimized by optimizing the procedure and choosing different phase durations of the protocol.



YITP-YSF 报告总结

——吕力

2023 年 8 月 3 号至 5 号 YITP-YSF Symposium: Perspectives on Non-Equilibrium Statistical Mechanics 在日本京都大学的汤川理论物理研究所召开，本次研讨会的主要目的是回顾非平衡统计力学领域的学术发展，并讨论其未来前景。研讨会的内容是基于现代统计物理学的应用范围及其广泛扩展，从拓扑材料等物理科学，量子计算机和人工智能的基础理论，到经济物理学和生物物理学。

在此次会议上，来自乌兹别克斯坦科学院核物理研究所（Institute of Nuclear Physics Academy of Sciences of Uzbekistan）的学者 Mukhayo Rasulova 作了名为“Evolution of a quantum system of many particles interacting via the generalized Yukawa potential”的报告。此报告通过探索由多个粒子组成的复杂量子系统的演化，深入研究了量子力学的有趣领域。报告的中心焦点在于由广义汤川势介导的相互作用，这是粒子交换汤川介子时出现的一种现象。通过考察与时间相关的 Schrödinger 方程和哈密顿算子，深入研究了广义汤川势影响下量子系统的动态演化和复杂行为。这项研究的影响涉及粒子物理、凝聚态物理和量子技术等领域。

对由多个相互作用的粒子组成的量子系统的研究产生了对物质在基本尺度上的行为的深刻见解。这些系统的一个有趣的方面是它们由广义汤川势介导产生相互作用，这个广义模型最初是作为汤川势的延伸而引入的，它考虑了更广泛的相互作用强度、距离的情形。研究量子系统的演化涉及到用数值或解析的方法解决与时间相关的 Schrödinger 方程。根据电势的具体参数，系统可以表现出多种行为，包括能量本征态跃迁、波函数纠缠和共振散射现象。在此报告相应的文章中，作者探讨了具有相同质量和电荷的粒子系统的动力学，这些粒子被放置在有界区域中，并通过广义汤川势相互作用。利用半群理论，作者证明了描述系统演化的量子动力学方程解的存在唯一性。并且作者详细介绍了问题的形成、对应的求解方法以及所得到的结果。

量子系统在广义汤川势影响下的演化具有深远的意义。在粒子物理领域，它提供了对强核力和弱核力的见解，有助于我们对基本相互作用的理解。此外，这项研究有助于模拟复杂量子系统的计算技术的发展，这在量子化学和材料科学等领域有应用。从研究这些系统中获得的见解也有可能为量子技术的进步提供信息，例如量子计算和量子通信。研究由广义汤川势介导的相互作用的量子系统仍然是一个活跃的研究领域。未来的努力可能包括探索更多奇异粒子的行为，扩展模型以包括相对论效应，并研究量子世界和宇宙学之间的潜在联系。



28th International Conference on Statistical Physics 会议总结

——王子博

Geometric thermodynamics: Nonequilibrium thermodynamics based on optimal transport and information geometry

在这个报告中，Sosuke Ito 教授总结了关于非平衡热力学的微分几何的最新发展，并通过专注于 Fokker-Planck 方程的非平衡态，提出了这些研究之间的关系。Ito 提出非平衡热力学的几何框架，即几何热力学，这为信息几何和最优传输理论之间的联系以及非平衡热力学几何的统一提供了新的视角。

具体地来说，首先，作者讨论了熵产生量 (entropy production) 的信息几何解释。熵产生量 $\sum(\tau+\Delta\tau; \tau)$ 可以理解为信息几何 (information geometry) 在向后流形上的投影。在此基础上，熵产生率和熵产生量 (σ_τ , entropy production rate) 都可以通过求解两个极小化问题得到

$$\sigma_\tau = \lim_{dt \rightarrow 0} \inf_{Q \in \mathcal{M}_B(\mathbb{P})} \frac{D_{KL}(\mathbb{P} \parallel Q)}{dt}$$

$$\sum(\tau + dt; \tau) = \inf_{Q \in \mathcal{M}_B(\mathbb{P})} D_{KL}(\mathbb{P} \parallel Q) + O(dt^2)$$

另外，作者得到了熵产生率在 Fisher 度量下的表示，这给出了熵产生率和观测量的涨落之间的一个平衡关系。基于熵产生量被视为 Fisher 信息的一半这个事实，可以提出热力学不确定性关系的一个新推广，即熵产生率和任意观测量的涨落之间的关系。

其次，作者讨论了最优传输理论和熵产生量之间的关系。对于一个对应于 Fokker-Planck 方程的随机过程，其关于初始概率密度 P_τ 和终值概率密度 $P_{\tau+\Delta\tau}$ 的熵产生量可以由 L²-Wasserstein 度量给出，也可以由 L²-Wasserstein 路径度量给出：

$$\sum(\tau + \Delta\tau; \tau) \geq \frac{[\mathcal{L}(\tau + \Delta\tau; \tau)]^2}{\mu T \Delta\tau} \geq \frac{[\mathcal{W}_2(P_\tau, P_{\tau+\Delta\tau})]^2}{\mu T \Delta\tau}$$

接下来作者解释了熵产生量的分解——过剩熵产生率 (excess entropy production rate) 和内部熵产生率 (housekeeping entropy production rate) 的物理意义。

最后，作者通过过剩熵产生速率给出了一个信息几何和最优传输之间的热力学解释。由于过剩熵产生率可以通过路径概率密度空间中的投影定理得到，故此也可以给出路径概率密度空间中的信息几何与最优传输理论的联系。



YITP-YSF 报告总结

——肖望

Scaling in driven fluids and the unreasonable effectiveness of Navier-Stokes-Fourier equations

本报告的作者是来自格拉纳达大学（University of Granada）的 Pablo Hurtado。格拉纳达大学是位于西班牙格拉纳达的一所公立大学，是西班牙最著名的大学之一。Pablo Hurtado 是格拉纳达大学科学学院卡洛斯一世理论与计算物理研究所电磁学与凝聚态物理系的教授，他对以下这些领域比较感兴趣且也发表了相关的论文：Fluctuations and Large Deviations、Fourier's Law and One-Dimensional Fluids、Gels and Soft Matter、Network Synchronization、Metastability and Nucleation 和 Coarsening and Phase Separation 等。

本次报告的是驱动流体中的标度和 Navier-Stokes-Fourier 方程的不合理有效性问题。他说流体在边界温度和速度梯度作用下脱离平衡的定常流动是最简单但最具挑战性的非平衡稳态例子之一。这种稳定状态由 Navier-Stokes-Fourier 方程描述，该方程决定了可压缩、粘性和导热流体的宏观结构。他们揭示了可压缩 Navier-Stokes-Fourier 问题平稳解的一个新的标度性质。

对于非线性依赖于流体动力场的一般输运系数，他们发现密度和温度场是流体压力和动能场的函数，该动能场测量的是相对于总热流与剪切应力之比的二次超额速度。该动力学场依次服从由剪切应力控制的空间标度规律，该规律由稳态密度场和温度场继承。

通过对两种典型分子流体进行大规模计算机模拟，令人崩溃又信服的数据，预测的标度定律得到了证实，同时证明了流体动力连续方程在捕捉有限尺寸分子流体的紧急特性方面的不合理有效性。总的来说，这些标度定律提供了一种表征驱动流体中固定流动的新方法。

他们讨论的是 Navier-Stokes-Fourier 方程的理论平稳解，从方程的角度提出了空间标度规律，最后还进行数值模拟证明了他们提出的标度定律。这种从方程本身出发，做理论解，并用数值验证的系统科研是我只做数值解需要大力学习的方向，通过对此次报告的学习，我可以尝试去在我现有数值计算的基础上加入理论分析的内容，这不仅可以充实我的毕业论文，也能拓展我的学术边界。

他们报告的工作与以下论文紧密相关：

Infinite family of universal profiles for heat current statistics in Fourier's law. Phys. Rev. E 99, 022134 (2019); arXiv:1810.10778.

A violation of universality in anomalous Fourier's law. Nature Sci. Rep. 6, 38823 (2016); arXiv:1506.03234. [pdf, Supp. Inf.]



YITP-YSF 报告总结

——杨璐璇

Langevin function emerged from Langevin equation as martingale mean drift

Ken Sekimoto

这篇文章主要围绕着随机过程、鞅过程和自调和漂移展开。作者首先通过鞅过程找到了 Langevin 方程和 Langevin 函数之间的联系。通常 Langevin 方程与典则分布之间的关系是通过 Einstein 关系是的 Langevin 方程的稳态变得规范。而在目前情形下, Langevin 方程的解以及其平均漂移项的演化都不具有规范的平稳密度。其中, Langevin 方程的解是无边界生长的, 其平均漂移项是会从内部被困在超球表面作为自然边界。其次, 这项工作增加了另一个例子, 说明自我参照如何产生非平凡的结果。整个文章主要包含以下几个部分。

首先, 本文探讨了调和函数和自调和漂移的概念。如果随机过程 $\bar{Y}_t = \bar{h}(\bar{X}_t)$ 是鞅过程则称 \bar{h} 是调和的。而自调和漂移是一种特殊的漂移, 其平均漂移项 $\bar{a}(\bar{x})$ 是固定点, 并满足:

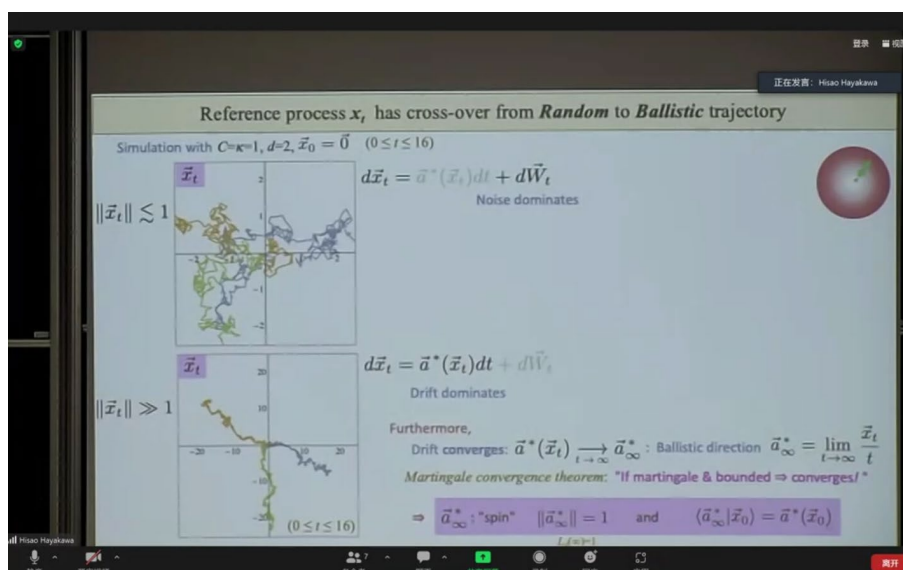
$$\left(\bar{a}^* \cdot \nabla\right) \bar{a}^* + \frac{1}{2} \Delta \bar{a}^* = \bar{0}. \quad (1)$$

其中 \bar{a}^* 是平均漂移项 $\bar{a}(\bar{x})$ 满足初始条件 $\bar{x}_{t=0} = \bar{0}$ 。

其次考虑了自调和漂移中的朗之万函数。报告给出自调和漂移的各向同性形式, 并对不同空间维度推导了朗之万函数。其解以双曲函数和第一类修正贝塞尔函数的形式表示。

接着关注自调和漂移的演化, 分析了平均漂移的发展, 并探讨了漂移在不同维度中的行为。由于 (1) 式的存在, 可以得到自调和漂移满足 $d\bar{a}^*(\bar{x}_t) = d\bar{W}_t \cdot (\nabla \bar{a}^*)$ 和 $\nabla \bar{a}^* = \frac{dL_d(\chi)}{d\chi} \hat{a}^* \hat{a}^* + \frac{L_d(\chi)}{\chi} (1 - \hat{a}^* \hat{a}^*)$ 。在维数为 1 的条件下, $da_t^* = (1 - a_t^{*2}) \cdot dW_t$ 等价于 Fokker-Planck 方程有扩散势 $\frac{1}{2}(1 - a^{*2})^2$ 。此外, 报告还在自调和漂移的背景下分析了势, 并解释了这一分析如何与自调和漂移的性质相联系。

此外, 本文考虑了由 Langevin 方程 $\frac{d\bar{x}_t}{dt} = \bar{a}(\bar{x}_t) + \bar{\xi}_t$ 生成的轨迹, 并提供了自调和漂移的解释。作者还探讨了长度和时间的单位及其对方程的影响, 这一部分有助于理解自调和漂移的物理意义。



最后作者留下了几个问题即是否存在非各向同性自谐漂移？对于状态空间的不同拓扑，是否存在对应的朗之万函数？时空调和函数也可以是一个不动点吗？是否会有自调和漂移的量子对应物，其中自旋不能被分割成碎片？自谐波漂移会使某些物理实体最优化吗？

该文章为自调和漂移提供了深入的见解，有利于我们理解漂移的行为及其在随机热力学背景下的含义。



➤ ICERM-Mathematical and Scientific Machine Learning (Jun 5-9, 2023)

ICERM 报告总结

——陈建宇

Title: Optimization-in-the-loop ML for energy and climate

主要内容：这篇工作介绍了应对气候变化问题，全社会需要采取的一些技术问题。虽然机器学习（ML）的方法有可能发挥重要作用，但这些方法往往难以应对许多气候和能源问题所固有的物理、硬约束和复杂的决策过程。为了解决这些限制，作者提出了“循环优化机器学习”的框架，并展示了它如何能够设计明确捕获相关约束和决策过程的机器学习模型。例如，该框架可用于设计基于学习的控制器，该控制器可执行与它们操作的系统相关联的稳定性标准或操作约束。它还可以实现基于任务的学习程序的设计，这些程序认识到将使用模型输出的下游决策过程。

作者主要研究的是 power and energy system，里面涉及到很多的决策问题，还有最优化，比如最小的能量，风能，核能等等。该问题的复杂之处在于这样的动力系统是由很多复杂的物理方程组构成的，并且具有很多严格的限制条件，传统的优化控制方法比较有局限性，特别是在处理速度的时候，所以需要新的方法。

作者的主要贡献在于开发了包含物理知识的机器学习方法的框架，硬约束，或下游决策程序来解决优化问题。例如：具有稳定性约束的电力系统控制，预测（认知需求预测）。

方法一：深度学习中的可微优化

要求损失函数要可微，利用隐函数定理在 KKT 最优性条件中的应用。作者还介绍了深度学习和鲁棒性最优控制之间的关系，基于李雅普诺夫稳定性准则，求解最佳的一组条件。

方法二：决策识别模型

主要应用在近似电力系统优化和电力需求预测上。

感悟：这种深度学习中的微分优化方法结合了机器学习和传统的优化控制理论结果，可以更好地解决复杂动力系统带有复杂的约束条件的情形，这样我们结合动力系统专业知识，就可以更好的解决别的实际问题。



ICERM 报告总结

——方程

Learning Reduced Order Models for Blood Flow Simulations using Graph Neural Networks

Luca Pegolotti Postdoctoral Researcher Marsden Lab, Stanford University

目标: 介绍一种使用图神经网络 (MeshGraphNet 的修改版) 模拟心血管系统血流动力学的方法, 这种方法在处理复杂的心血管几何结构和边界条件时表现出优越性能。

意义: 这种方法的潜在应用包括非侵入性评估冠状动脉瘤的严重程度、提出先天性心脏病的新手术方法、优化医疗设备以及为心血管疾病患者制定个性化治疗方案。这些应用有助于改善心血管疾病的诊断和治疗, 并为医生提供更准确的决策支持。

创新点: 使用图神经网络开发降阶模型 (Reduced Order Model), 可以准确模拟患者特定脉管系统的一维近似值中的血流动力学; 将生理测量纳入神经网络, 无需向网络提供边界条件参数即可获得准确的近似结果; 展示了网络在各种不同几何形状和拓扑上的泛化性; 采用灵敏度分析以确定哪些节点和边缘特征对于正确近似压力和流量更重要; 该方法在心血管建模和模拟领域的潜在应用, 包括为心血管疾病患者制定个性化治疗计划。

对我的研究的启发: 基于数据开发降阶模型是和有效动力学相似的问题。报告中提到了两类方法, 纯数据或者借助物理知识得到的降阶模型, 在实际应用中, 基于物理知识的模型往往很难得到, 无模型或无方程的纯数据方法来学降阶模型更适合于实际场景。这种开发于心血系统的方法, 也为将现在的模拟数据推广到真实数据提供了一个实例。

相关论文链接: <https://arxiv.org/abs/2303.07310>



ICERM 报告总结

——冯灵羽

Machine-Learned Finite Element Exterior Calculus for Linear and Nonlinear Problems

Jonas Actor

从具有物理规律的高保真模型数据、计算密集型数据、或观测数据中，建立能够描述数据并保物理规律的模型。常用的方法是只用数据学习的黑箱网络，通过惩罚项添加物理信息的物理知情网络（PINN）。准确的保物理信息，即保结构的网络，更近似于传统的物理方法，或者是数值解。因此，设计一个完全遵循物理信息的机器学习方法是有必要的。保证物理约束、了解新指标、无网格结构及精确集成构建的链复合体是外部微积分框架的基础。此机器学习框架提供了几何的可微参数化，以端到端的方式进行训练，从全场数据中提取简化模型，同时精确地保留物理信息。该体系结构可进行数据驱动的有限元外部演算，具有闭合形式求积规则的混合有限元空间。

启发：将传统的有限元方法与机器学习的方法结合，可以弥补机器学习在保结构上存在的缺陷。结合传统的数值方法考虑机器学习问题，或许能够取得更好的结果。

相关文献：

1. Data-Driven Whitney Forms for Structure-Preserving Control Volume Analysis
2. Enforcing exact physics in scientific machine learning: a data-driven exterior calculus on graphs
3. Polynomial-Spline Neural Networks with Exact Integrals
4. Greedy Fiedler Spectral Partitioning for Data-driven Discrete Exterior Calculus



ICERM 报告总结

——肖望

On Learning Operators

Siddhartha Mishra 是苏黎世联邦理工学院，应用数学研究院的教授。这次报告的主题是学习算子。从数据中学习算子正在成为将机器学习应用于偏微分方程的主流范例。然而，对于算子学习的确切涵义仍然缺乏严格的表征。

他们认为，一个模型仅仅将函数作为输入和输出进行处理并不能被划定为算子学习框架，还需要施加某种形式的连续离散等价关系，以实现算子本身的真正学习，而非仅仅是其离散表示。为此，他们借鉴了谐波分析中的框架理论，并定义了等价表示神经算子 (ReNOs)，这些算子被构造出来以强制施加一种适当的连续-离散等价关系。他们调查了几种现有的学习框架是否是 ReNOs。然后提出了一种新颖的算子学习范式，即卷积神经算子 (CNOs)，这些算子被设计成 ReNOs。他们证明了 CNOs 能够以所需的精度逼近来自大类偏微分方程的算子。此外，他们还通过数值实验将 CNOs 与现有的算子学习算法进行了比较，证明了在各种偏微分方程中，CNOs 的性能具有竞争力。

这次报告的学习，更新了我对算子学习的认识，打开了我使用算子的格局，以前我仅仅是用机器学习去学习离散形式的算子，这太局限了，只有学习到连续形式的算子，才是真正意义上地实现了算子的价值。

我从这个报告中还学习到，我们要站在巨人的肩膀上利用现有的知识体系去解决我们遇到的新的问题，这也是一个提出新的理论体系的过程，比如他们就是借助了谐波分析中的理论框架、卷积神经网络的基础，去解决现有学习算子只学习到离散形式的关系的问题，提出了一种新颖的连续学习算子的范式。

他们报告的工作呈现在以下两篇论文中了：[ArXiv:2302.01178v2](https://arxiv.org/abs/2302.01178v2) 和 [ArXiv:2305.19913v1](https://arxiv.org/abs/2305.19913v1)。

ICERM 报告总结

——杨璐璇

Operator Learning For Solving PDE-related Problems

Zecheng Zhang

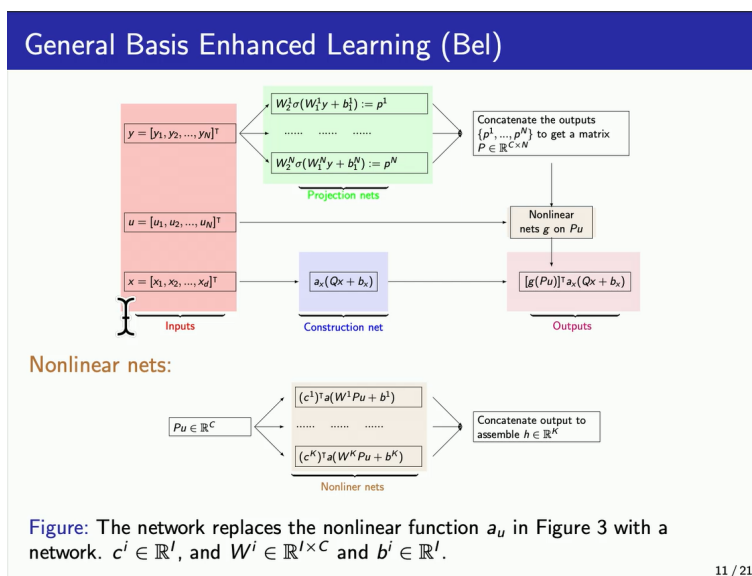
这个报告主要是围绕算子学习求解 PDE 问题展开。报告首先提到算子学习目前的应用可以包括三个方面。第一个是用于求解含参数的 PDE。例如对于 Burgers 方程，可以学习初始值到终止值之间的函数映射。第二个是用于动力系统。比如可以学习积分算子。第三个就是用于学习多保真度模型和多尺度模型。但，算子学习也面临的一些挑战，其中一个就是离散不变。

离散不变框架允许对两个不同输入的不同输出进行采样。基于利用不同的输出来捕捉两种不同的函数，可以避免采样混淆问题。因此，在离散不变的基础下，报告介绍了一种 DeepONet 的扩展框架。该框架的产生是源于一种近似算子的方法，即：

$$G(u)(x) \approx \sum_{k=1}^K q_k(x) g\left(\sum_{j=1}^N p_{kj} u_j\right)$$

其中 $q_k(x)$ 为输出函数空间的一些可学习的基函数。 p_{kj} 为输入函数 u 在一组基上的投影。 g 是非线性函数。这个结构可以看成是 encoder-decoder 的结构。首先将这个 u 投影到一个低维空间，得到 u 的降阶模型。然后借助这个可学习基函数 $q_k(x)$ ，从这个降阶模型开始重构输出函数 u 。类比于神经网络式子：

$$G_\theta(u)(x) = \sum_{k=1}^K a_x((q^k)^T x + b_x^k) a_u(\hat{u}^T W_y^{2,k} (a_y(W_y^{1,k} y + b_y^k)))$$





基于近似算子公式和相对应的神经网络式子，一种求解参数偏微分方程的无网格神经网络算子被提出。这种无网格化的算法在训练中是不需要对输入函数进行特定的离散化选择。此结构也被称为“BelNet”（The basis enhanced learning network）。

BelNet 模型将输入函数投影到潜在空间中，并重构输出函数。对于基函数的学习，模型专门构建了子网络进行训练学习。另外还利用分支网络去捕捉函数 g 的非线性性质。同时，从理论上，也推广了非线性算子的广义逼近理论。最后，报告展示了在模型降阶和欠光滑输入等例子中，BelNet 模型有着良好的算法性能表现。

通过该报告，我个人觉得该方法可以用于解决动力系统中含有积分算子的一些问题，或者也可以运用到求解 Fokker-Planck 方程从而拓展到 SDE 的领域。



➤ **IUTAM Symposium on Data-driven Nonlinear and Stochastic Dynamics with the Control**

IUTAM 关于数据驱动的非线性和随机动力学与控制研讨会——会议总结

——方程

IUTAM 关于数据驱动的非线性和随机动力学与控制研讨会于 6 月 5 号——6 月 9 号于陕西省西安惠宾苑酒店举行，会议由西北工业大学承办，许勇教授主持并开幕致辞，本次研讨会旨在收集和讨论非线性和随机动力学中数据驱动方法的最新进展，以促进相关领域的发展。

与会者包括来自海内外各大学、研究机构的教授、学者百余人。会议内容涵盖了非线性和随机动力系统的非数据驱动建模和反问题，非线性和随机系统的非数据驱动识别，非数据驱动的分析方法和数值方法非线性随机系统等多个方面。比如来自波茨坦气候影响研究所和柏林洪堡大学物理研究所 Jürgen Kurths 教授结合极端事件气候驱动因素的详细模型和输电网络的级联模型，提供了一个解决电网中风引起的输电线路故障整体协同进化模型；来自中国科学院大学的陈洛南教授介绍了基于动力学的非数据科学和人工智能，用于研究生物学和医学中的动态过程和疾病进展；来自南京航空航天大学的朱金杰老师介绍了偏差理论应用于随机相干振荡的降维问题等。会议期间还设有海报展示环节，与会者可以展示自己的研究成果，促进了学术之间的合作和创新。数学中心段金桥教授受邀作报告，高婷老师、肖望在读博士、方程在读博士、杨璐璇在读博士进行了海报展示和快速演讲。

本次研讨会为与会者提供了一个深入探讨数据驱动的非线性和随机动力学与控制领域的机会，与会者得以分享最新的研究成果、交流经验和建立合作关系。这将对该领域的进一步发展和应用产生积极的影响

对我个人而言，该研讨会学术氛围浓郁，讨论气氛融洽，许多偏应用的报告有助于帮我思考怎样实现理论到实际应用的衔接。研讨会上不同的研究方向给予我新的想法和思考，有益于未来的研究工作。就目前和我相关的研究方法而言，与会报告和海报也有所涉及，受益良多。

Data-driven identification of variational equations and intrinsic structures

Yong Wang

目标：通过将理论框架嵌入系统中，设计数据驱动算法以从离散数据中识别变分方程和内在结构

意义：将动力学理论和数据科学算法有机融合，以促进它们的共同进步，可应用于物理实例中。



创新点：首先，以变分形式开发了一种新的数据驱动的物理定律识别，从离散数据入手，构造待定积分，进而得到变分表达，最后转换为求解一组超定线性代数方程的系数。与微分形式数据驱动的物理定律识别相比，该方法包括降低了数据要求，对测量噪声鲁棒。至于识别内在结构，另外一种数据驱动方法将欧拉-拉格朗日方程嵌入到一个未知系统中，并基于正交性提取拉格朗日量（对于离散系统）或拉格朗日密度（对于连续系统）。一旦发现拉格朗日量，势能同时被识别。因此可以使用反馈控制来定性改变动力系统行为，例如平衡点的数量和稳定性。

对我的研究的启发：基于物理知识开发的数据驱动方法可以实现更复杂和具体的目标，比如上面提到的变分方程比微分方程更一般、内在结构或守恒律利用拉格朗日框架识别，类似于 Kramers-Moyal 公式提供了关于漂移和扩散系数的信息。这提供了一种“平衡”：对于数据驱动方法，由于对系统未知而开发的纯数据方法，和基于系统假设，从而利用物理知识或动力学理论来实现更复杂的目标。

相关论文：

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022509619306246>

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S002250962200304>



IUTAM 会议总结

——肖望

2023年6月4日至2023年6月10日，我与方程、杨璐璇从学校出发，去往西安参加了 International Union of Theoretical and Applied Mechanics 下属的一个和随机动力系统与数据驱动相关的研讨会 Symposium on Data-driven Nonlinear and Stochastic Dynamics with the Control。这是一个国际会议，该会议的目的是，收集和讨论非线性和随机动力学中数据驱动方法的最新进展，以促进相关领域的发展。在参会之前，我们还提交了一个 poster，希望能遇到小同行，一起讨论问题，激发灵感。

会议上，我遇到了像 Kurths、Stepan 等学术大佬，这些老师气场强大，对自己的课题娓娓道来，说话风趣幽默，我被这些老师的人格魅力所折服。这次会议也是我第一次线下听段老师做报告，我被段老师激情澎湃的演讲震撼到了，段老师既拥有宽阔的视野，对自己的课题也有了深入而广泛的研究，把枯燥的数学理论与公式讲得生动极了。演讲台上发光的段老师与我们平时见到的低调谦逊的段老师完全不一样。

会议中，我们遇到了只知其名，未知其人的李扬师兄，以及李扬师兄的师兄朱金杰师兄。会议期间，我们跟两个师兄进行了深入的沟通与交流，让我受益匪浅。特别是李扬师兄与我们谈论的科研的意义，是要以问题为导向，做科研就是想办法去解决我们遇到的问题，而问题，可以来源于听别人的报告，对于别人做的问题，看我是否有更好的办法去解决，这就会产生一个新的课题。

另外，在会议上我还认识了不同地区的老师，跟他们讨论了高校就业问题，大致了解了不同地区、不同层级的高校的面试要求、考核要求及薪资待遇，沿海城市薪资待遇普遍会比中西部地区薪资待遇高，985 和 211 高校的面试要求和考核要求普遍会比普通高校的要求高，而普通高校的考核要求也在逐年提高，作为即将毕业的博士生，就业压力挺大，还需努力提高自身综合实力，掌握文章硬通货。最后，我还向各位师兄师姐以及参会老师了解一下国内外博后的境况及优缺点，需综合考虑进行选择。

这次会议也是我第一次用英语对自己的课题做 fast talk，通过这次演讲及这次会议，我深刻体会到了自己英语的薄弱性和学好英语的重要性。英语作为国际通用语言，只有熟练掌握这门语言，能听懂理解别人的报告，顺畅地表达自己的观点，才有机会进行学术交流，不然就是闭关锁国，闭门造车，学术上必然得不到精进。另外，这次 fast talk 还有一个小收获就是，许勇老师一位学生的工科同学在做类似的问题，但他们是用工程实验的方法做的，目前还没有理论相关的工作，若我能用数学理论描述工程试验，用理论指导实验，或许也是一个不错的课题。

最后，非常感谢段老师和高婷师姐为我提供经济支持，给我机会出来参加此次会议，才让我拥有了这些宝贵的经验和体会。



Dimension-reduced probability density evolution equations: A physically or physics-informed data driven approach

陈建兵老师是同济大学土木工程学院建筑工程系的教授，博士生导师，主要研究方向是结构随机动力学与控制、工程可靠性理论与方法和结构非线性分析等领域，特别致力于发展工程结构灾害随机相应分析与抗灾可靠性控制的概率密度演化理论。陈老师这次演讲的主题是物理或物理信息数据驱动方法中的降维概率密度演化方程。

陈老师研究的目的是将高维非线性随机动力系统，控制概率密度函数的方程降维，将高维方程简化为低维，甚至是一维方程，然后通过物理驱动的方法或物理信息驱动的方法来求解。

这种方法不仅解决了随机动力系统长期以来面临的高维难题，在某种意义上也为数据驱动方法提供了理论基础，可以研究目的或经验判断来指定感兴趣的系统的维度和数量。

降维概率密度演化方程在理论上认为随着数据的丰富，响应概率密度趋于精确解，但直接施加吸收边界条件的首道可靠性往往会产生偏倚结果。这在某种程度上规定了某些类型的数据驱动方法的适用性范围。

对于一个高维非线性随机动力系统，陈老师他们构造了一个吸收边界过程，通过降维概率密度演化方程得到安全域中的剩余概率密度，从而证得可靠性。他们还证明了降维算子和吸收边界条件施加算子的阶数是不可交换的。这导致吸收边界过程的本征漂移系数函数与无吸收边界过程的本征漂移系数函数不同，从而通过先降维后施加吸收边界来评估的首通可靠度在理论上并不是精确解。通过对非线性结构在随机地震作用下的随机响应分析和可靠度评估实例，验证了这种方法的准确性和有效性。

这种降维处理的思想可能可以用于我现在做的三维 Navier-Stokes 方程求解中，将三维 Navier-Stokes 方程问题降至二维，对数据量要求更少，训练神经网络的过程也会更快。

与此次报告最相关的作者文章：Equation governing the probability density evolution of multi-dimensional linear fractional differential systems subject to Gaussian white noise

西安参会总结

——杨璐璇

在6月5日-6月9日，我参加了西安 IUTAM2023 会议。在会议中，我收获了很多前沿的知识，也认识了很多新朋友。

在报告中，印象最为深刻的是西北工业大学许勇老师和复旦大学林伟老师的报告。许勇老师的报告主要讲的是将 SDE 转化为 Fokker-Planck 方程，然后再利用神经网络如 DNN 求解 PDE。他提到传统的蒙特卡洛方法需要大量的样本数据去求解 PDE，为克服这个弊端，他们提出了一个 KD-tree 的模型。该模型只需要通过少量的样本数据对积分区域进行多次的分割，得到合适的离散积分点，从而估计归一化积分得到精确的 Fokker-Planck 方程的解。此外，许老师提到，他们目前没有克服维数灾难的问题，再将来迁移学习会用于他们的模型去解决这个问题。林伟老师的报告主要讲了使用数据驱动和机器学习技术预测和调节复杂的动力系统。他提到基于 Takens 定理，他将数据进行重构，并把可观察到的一个满足 SDE 方程的系统映射到低维空间，并研究吸引子带时滞和不带时滞的两种情况。此外，基于 Neural ODE 模型，他介绍一类新的具有延迟的连续深度神经网络，并将其命名为神经延迟微分方程 (Neural Delay Differential Equation)，在计算相应的梯度时，他们也使用伴随灵敏度法来学习延迟动力学。该方法可以有效建立低维相空间中轨迹可以相互相交的延迟动力学模型，并且运用到了实际的图像数据中。另外，林老师还将随机时滞微分方程与随机最优控制结合来解决控制问题。



左：许勇老师报告；右：林伟老师报告

报告外，我也在茶歇和午饭时间与其他老师和师兄进行了交流。其中，在和李扬师兄交流最优控制与最有可能转移轨道的结合时，师兄指出我目前的课题或许可以使用 ODEsolver 来刻画状态变量。同时，我也和朱金杰老师交流了 kuramoto 模型，以及 OM 泛函和大偏差之间的联系。朱老师建议我未来从 OM 泛函角度考虑最有可能转移轨道的相关问题可能更好。另外，也认识了很多许勇老师课题组的伙伴们。

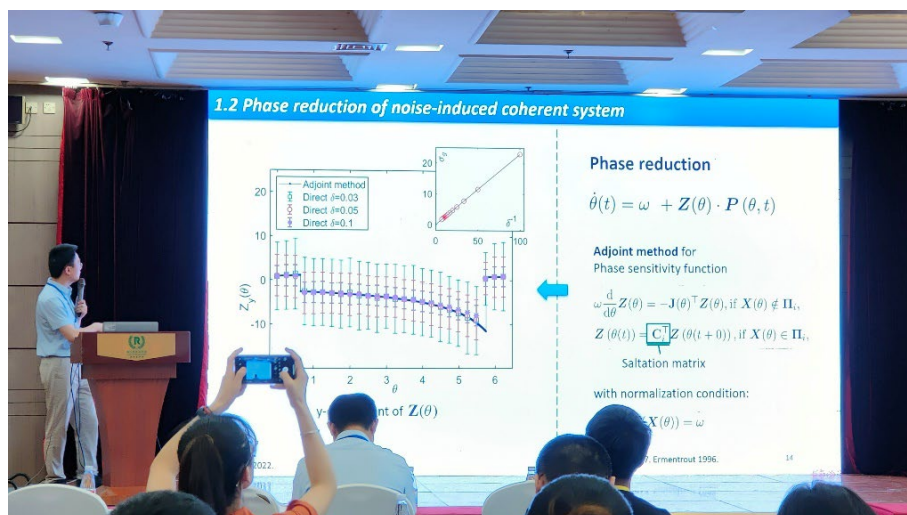
此次西安行，我发现大家都开始做基于数据驱动的随机动力系统与机器学习相结合的方向，他们的问题包括了识别变异点，求解 Fokker-Planck 方程，学习低维动力系统的行为等。这为我未来科研之后给出了一些方向性指引。

Analysis of stochastic dynamical systems based on large deviation theory and data-driven theory

——朱金杰老师报告总结

朱老师主要介绍了两个方面的内容，一个方面是介绍大偏差理论的基本概念，并将其应用于随机相干振子的降维问题，另外一个方面是利用数据驱动的方法来解决随机动力系统的反问题和逃逸问题。

在无周期轨道的可激系统中，相干振荡问题可由噪声引起。因此，朱老师介绍了一种由噪声诱导的相干可激系统的相位简化理论。这个理论是通过找到一个类似确定性振荡情况下极限环的参考轨道来实现的。在这个框架下，他们建立了一个近似的混合系统来计算相位敏感性函数，并构建了一个有效的降维相位方程，用于分析周期受迫或相互耦合的振荡器。最后，通过蒙特卡罗算法验证了该模型可以定量地预测单个系统对周期力的夹带和两个耦合系统的同步化，包括由噪声引起的相位滑移行为。基于该方法推导出的相位模型可简单有效地描述由噪声引起的振荡。



朱老师报告现场图

针对于数据驱动的方法，朱老师介绍了一种用于识别具有非高斯 Lévy 噪声随机动力系统中的跳测度、漂移系数和扩散系数的数值方法。此外，也从理论上推导了用转移概率密度或样本路径来表示跳测度、漂移和扩散系数的公式。对于数值方法，首先是需要将系统轨迹离散化为一组样本路径，并通过观测数据或模拟数据获得这些样本路径。受 Chapman-Kolmogorov 方程的推导启发，在识别跳测度时，可以用极坐标变换的雅可比行列式推导出任意维系统的近似稳定性参数和噪声强度的表达式，即根据表达式计算出跳测度。计算漂移系数和扩散系数则是通过推导出以转移概率密度为基础的漂移和扩散系数的表达式。其中，转移概率密度满足相关的非局部 Fokker-Planck 方程。同时，通过利用基函数构成多项式近似漂移系数和扩散系数，从而将计算漂移系数和扩散系数转化为求解最优解的最小二乘问题。



这个报告让我收获颇多，其中基于样本轨道的数据，推导出的跳测度、漂移系数和扩散系数的公式，将有利于我们识别更多非高斯情形下的复杂动力系统，甚至可推广到高维情形。

相关文献：

[1] Yang Li, Jinqiao Duan, A data-driven approach for discovering stochastic dynamical systems with non-Gaussian Lévy noise, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 417, 2021, 132830, ISSN 0167-2789, <https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132830>.



Academic Achievement 学术成果

数学中心近期研究进展

➤ 高婷

发表文章:

[1] J. Guo, T. Gao*, Y. Lan, P. Zhang, S. Yang, J. Duan, Learning Stochastic Dynamical Systems as an Implicit Regularization with Graph Neural Network, ICML 2023 workshop on High-dimensional Learning Dynamics.

研究了一类时空随机图网络对于高维时空数据的长时预测,证明了噪声对于收敛的稳定性,并利用谱分析对比了有无噪声时,训练过程的收敛速度。

[2] H. Huang, T. Gao*, Y. Gui, J. Guo, P. Zhang, N. Du, J. Duan, Model Based Reinforcement Learning with Non-Gaussian Environment Dynamics and its Application to Portfolio Optimization, Chaos, 33, 083129, 2023.

在非高斯高维金融因子的环境下,基于强化学习的投资组合最优化。

[3] C. Fang, Y. Lu*, T. Gao, J. Duan, Reservoir Computing with Error Correction: Long-term Behaviors of Stochastic Dynamical Systems, Physica D, Vol 456, 133919, 2023.

在经典储备池算法中,引入规范流模型进行噪声补偿,学习了复杂噪声数据的高维嵌入图结构,有效进行了噪声数据的长时演化预测并具有较高精度,而经典储备池算法无法预测到噪声的演化。

被接收文章:

[1] P. Li, T. Gao*, H. Huang, J. Cheng, S. Gao, Z. Zeng, J. Duan, Privacy-Preserving Discretized Spiking Neural Networks, 2023. Accepted by ICNC .

第一篇结合 TFHE 加密方式下和 SNN 神经网络的结合,利用函数自举得到了较精确的密文预测。

[2] T. Gao, J. Duan*, Stochastic Dynamics and Data Science, Stochastics and Dynamics. 2023. Accepted.

本综述涉及的主题包括随机分析、动力系统、反问题、数据同化、数值分析、优化、非参数统计、不确定性量化、深度学习和深度强化学习。

[3] L. Feng, T. Gao, T. Li*, Z. Lin, X. Liu, Approximations of Lévy processes by integrated



fast oscillating Ornstein-Uhlenbeck processes, *Stochastics and Dynamics*. 2023. Accepted.
本文研究了任意 càdlàg Lévy 过程的光滑逼近。这种近似过程称为集成快速振荡 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程。我们知道,逼近过程是连续的,而过程的极限可能是不连续的,因此在一致拓扑或 Skorokhod J_1 拓扑下的收敛性一般不成立。因此,我们在 Skorokhod M_1 拓扑中建立了一个近似。

[4] J. Guo, T. Gao*, P. Zhang, J. Duan, Deep Reinforcement Learning in Finite-Horizon to Explore the Most Probable Transition Pathway, 2023, *Physica D*. Accepted.

本文的重点是利用强化学习有效地发现随机动力系统最可能的过渡路径。用 Onsager-Machlup 作用泛函理论来量化随机动力系统种的罕见事件,找到最可能的路径相当于求解作用泛函的变分问题。当参考轨道附近的路径不能明确表示作用函数时,需要将变分问题转化为最优控制问题。

➤ 郇真

今年 7-9 月继续思考 2-向量丛的几何、物理阐释和代数拓扑阐释 (即椭圆上同调),并初步通过诱导代数几何构造出联结二者的范畴化陈类函子。目前国际上对于 2-向量丛的研究很有限,还没有人给出它的两个层面之间的联系和对应关系。

➤ 刘超

2023 年 7-9 月继续这两年关于完全非线性 Jeans 不稳定性的工作,由于最近的文章证明了在特定 sources 下的 Euler-Poisson 方程的非线性 Jeans 不稳定性,因此去掉 sources 的问题变得异常重要,虽然只是简单去掉 sources,但是问题机制发生了很大改变,不是由 source 帮助下产生。经过几个月的工作,写了 1200 多页的 latex 草稿,最终仍没有成功,没有找到本质机制和可能的行为。所以本项工作已经于一周前暂时搁置。这三个月没有新文章,全部用于探索这个问题。

➤ 林聪萍

计算分析面上项目课题中内质网流与内质网附着点分布之间的关系。



➤ 向茂松

与合作者在 L 无穷向量丛的 Atiyah 同调类在弱等价下的不变性方面取得了重要进展。目前在验证一些细节，准备撰写论文。

➤ 殷轲

与 Kewei Zhang, 邓黄严合作，提出了一类求解带约束优化问题的新算法。从与带约束优化问题有紧密联系的极小极大问题出发，提出的新算法。算法每一步需要求解一个极小极大子问题，而这样的极小极大问题具有不光滑性质。受到 Moreau 包络的启发，本文提出了一类光滑化函数，得到该极小极大问题的光滑逼近。该光滑化逼近的函数和一个参数紧密相关，算法中加入了自适应地调节这个参数的策略，使得算法既能得到一系列收敛到 KKT 点的点列，也能渐进得到满足 KKT 条件的拉格朗日乘子，并且达到加速收敛的目的。

➤ 赵蒙

研究了多界面收缩问题，研究了多界面间的相互作用和不同的流体粘性对系统的影响。系统中存在汇时，单一界面在演化中会形成尖点，多界面的相互作用可以改变尖点的出现。

➤ 张一威

继续从事光滑遍历论中的遍历优化，重分形理论，与西北大学历智明教授获批华科湖北省工程与建模实验室开放基金。



Qualifying Exams 资格考试

Test of English for Math Writing

Center for Mathematical Sciences
Huazhong University of Science and Technology

July 2023

Total: 100 points.

Part A:

For each statement, please provide a better version, by correcting grammar mistakes and/or improving the writing style. **Two points for each problem. No partial credits.**

1. This is function that is used to estimate the upper bound for the probability.
2. We take D is a bounded domain.
3. This paper considers a special dynamical system.
4. Cam. University Press.
5. Title:
Transition Phenomena for Neuronal system under noise
6. This result is good, see Duan [1].
7. We obtain the corresponding spectral gap approaches to infinity as the delay tends to zero.
8. Take $A = 8$, we have $B > 0$.
9. This work was partly supported by the NSFC grant No. 888999.
10. This is a good paper has many figures.
11. We verify our algorithm is effective by estimating the error.
12. We would like to suggest possible reviewers are: John Doe and Mike Doe.
13. We assume that the stochastic differential equation (1) has unique strong solution?
14. Doctoral Thesis Title:
Transition phenomena for Neuron Systems driven by noise
15. By the Theorem 1, we know that $A = 88$.
16. Take every $x \in B$, we have $x_{t_i} \leq b - \epsilon$
17. In the proof of Lemma 3.1, one trick has been used here is to realize that $A + B = 100\%$.



18. Note that $z(t)$ is continuous differentiable.
19. We first show a result A , then we proved a result B , and finally a result C was demonstrated.
20. Denote the remaining terms by $\Delta[y, z]$, we have $A = 88$.
21. Since the quantities $\{X_0, X_f, T_0, T_f\}$ are given. We now prove Theorem 1.
22. We will use the mean exit time, escape probability and Maximal likely trajectory to help quantify stochastic dynamics.
23. We consider orbit from x to y .
24. I have read paper about Onsager-Machlup action functional.
25. This is trajectory for a dynamical system.
26. $f(x)$ is also equal to the gradient of potential function V .
27. The most probable transition pathways are computed by numerically solving two point boundary value problem.
28. While it does not display the superiority on operation time for the estimation method based on the Wong-Zakai reduced system compared to that based on the original reduced system.
29. This is a path connects A and B .
30. These are trajectories for dynamical system.
31. Thus, we need more carefully estimations on the $\|u\|_{H^1}^2$.
32. So to find the most probable transition path u_t , one is supposed to find it satisfies the following condition.
33. There may be several paths satisfy (1) and (2).
34. It is true for every $T_0 < t^* < T_f$.
35. For every $0 < \epsilon < 1$, we conclude that $g(\epsilon) = 10$.

Part B:

Translate this Preface into Chinese (15 points).

A glance at the table of contents will reveal that this textbook treats topics in analysis at the “Advanced Calculus” level. The aim has been to provide a development of the subject which is honest, rigorous, up to date, and, at the same time, not too pedantic. The book provides a transition from elementary calculus to advanced courses in real and complex function theory, and it introduces the reader to some of the abstract thinking that pervades modern analysis.



Point set topology is developed in the setting of general metric spaces as well as in Euclidean n -space, and two new chapters have been added on Lebesgue integration. The material on line integrals, vector analysis, and surface integrals has been deleted. The order of some chapters has been rearranged, many sections have been completely rewritten, and several new exercises have been added.

The development of Lebesgue integration follows the Riesz-Nagy approach which focuses directly on functions and their integrals and does not depend on measure theory. The treatment here is simplified, spread out, and somewhat rearranged for presentation at the undergraduate level.

Part C:

Translate this Abstract into Chinese (15 points).

We consider n -linear Nambu brackets in dimension N higher than n . Starting from a Hamiltonian system with a Poisson bracket and K Casimir invariants defined in the phase space of dimension $N = K + 2M$, where M is the number of effective degrees of freedom, we investigate a necessary and sufficient condition for this system to possess n -linear Nambu brackets. For the case of $n = 3$, by looking for the possible solutions to the fundamental identity, the condition is found to be $N = K + 2$, i.e., the system should have effectively one degree of freedom. Locally, it is shown that there is only one fundamental solution, up to a local change of variables, and this solution is the canonical Nambu bracket, generated by Levi-Civita tensors. These results generalize to the case of $n(\geq 4)$ -linear Nambu brackets.



Classical Mechanics Qualifying Exam

Center for Mathematical Sciences

Huazhong University of Science and Technology

Note: This exam covers the book “Mathematical Physics Classical Mechanics” Chapters 1-13, by A. Knauf.

1. (10 points) On the phase space $M := \mathbb{C}$, consider, for a parameter $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, the mappings $\Phi_t : M \rightarrow M, \Phi_t(m) := \lambda^t m$, with $t \in \mathbb{Z}$.

Show:

- (a) These mappings form a continuous dynamical system, and $0 \in M$ is a fixed point.
(b) This fixed point is Lyapunov-stable if and only if $|\lambda| \leq 1$.
(c) The fixed point is asymptotically stable if and only if $|\lambda| < 1$.

2. (10 points) Sketch the graphs of the velocity functions $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with

$$f_1(x) := (x^2 - 1)^2, f_2(x) := (x^2 + 1)^2.$$

Determine the fixed points and the minimal invariant sets of the differential equations $\dot{x} = f_i(x)$. Without solving the differential equations explicitly, describe the qualitative behavior of their solutions $x_i(t, x_0)$ for times t and initial value x_0 .

3. (10 points) Let (E, ω) be a symplectic vector space. Prove that
- (a). If $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of $u \in \mathfrak{sp}(E, \omega)$ with (algebraic) multiplicity k , then $-\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$ are also eigenvalues of multiplicity k .
- (b). If 0 is an eigenvalue of $u \in \mathfrak{sp}(E, \omega)$, then its multiplicity is even.
4. (10 points) Let (E, ω) be a symplectic vector space.
- (a) Show that for any two vectors $v, w \in E \setminus \{0\}$, there is a symplectic mapping $f \in \text{Sp}(E, \omega)$ for which $f(v) = w$.
- (b) Show by counterexample that, for $\dim(E) > 2$, an arbitrary 2-dimensional subspace F of (E, ω) cannot be mapped by symplectic mapping $f \in \text{Sp}(E, \omega)$ on an arbitrary 2-dimensional subspace F' .

5. (10 points) We consider the single linear, time dependent differential equation

$$\ddot{x}(t) = -f(t)x(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

with continuous, T -periodic $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), T > 0$, hence $f(t+T) = f(t)$. This differential equation is equivalent to a Hamiltonian system with time dependent Hamiltonian

$$H : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^2 \rightarrow \mathbb{R}, H(t, x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}f(t)x_2^2.$$

- (a) Show that the linear mappings $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \Phi_t(x(0)) := x(t), t \in \mathbb{R}$, defined by the



Hamiltonian flow do not in general form a group, due to the time dependence of f .

(b) Show that $\Phi_{T+s} = \Phi_s \circ \Phi_T$ for all $s \in \mathbb{R}$. It then follows that the mappings

$\Phi_{nT} = (\Phi_T)^n, n \in \mathbb{Z}$, form a group.

6. (10 points) Let $H : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be convex and

$$H^* : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, H^*(q) := \sup_{p \in \mathbb{R}^d} (\langle p, q \rangle - H(p))$$

the Legendre transform of H .

(a) Show: If $H(p) = \frac{1}{r} \|p\|^r$ with $r \in (1, \infty)$, then $H^*(q) = \frac{1}{s} \|q\|^s$, with $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

(b) Now choose $H(p) = \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle + \langle b, p \rangle + c$ with a symmetric, positive definite matrix

$A, b \in \mathbb{R}^d$ and $c \in \mathbb{R}$. Determine H^* .

Remark: This formula is used for the Legendre transform of the Lagrangian that describes the motion in an electromagnetic field, see Exercise 8.8 (b).

7. (10 points) A bead with mass m slides without friction under the influence of acceleration

of gravity g on a parabolic wire of the form $z = \frac{1}{2} \alpha^2 x^2$, where the z -axis points

vertically upwards. The wire rotates with a constant angular velocity ω about the z -axis.

(a) Calculate the Hamiltonian H .

(b) Investigate the stability of the point $(0,0)$ by means of the linearization of the Hamiltonian vector field X_H .

(c) Show that for $g\alpha^2 > \omega^2$ (i.e., slow rotation) and energy E , the bead performs a periodic motion with period

$$T = \frac{\sqrt{8m}}{\beta} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{\alpha^4 E}{\beta^2} \sin^2(\theta) \right)^{1/2} d\theta$$

with $\beta^2 = \frac{m}{2} (g\alpha^2 - \omega^2)$.

8. (10 points) Let $B = (B_1, B_2, B_3)^T \in C^\infty(\mathbb{R}_q^3, \mathbb{R}^3)$ a location dependent magnetic field, i.e.,

a divergence free vector field, $\text{div}(B) = 0$. The 2-form $\omega_B \in \Omega^2(P)$ on the phase space

$P := \mathbb{R}_q^3 \times \mathbb{R}_v^3$ will be defined by

$$\omega_B := \omega_0 + B_1 dq_2 \wedge dq_3 + B_2 dq_3 \wedge dq_1 + B_3 dq_1 \wedge dq_2 \quad \text{with} \quad \omega_0 = \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge dv_i$$

(a) Show that ω_B is a symplectic form on P .

(b) For vector fields $X, Y : P \rightarrow \mathbb{R}^6$, calculate the function $\omega_B(X, Y) : P \rightarrow \mathbb{R}$.

(c) For $H : P \rightarrow \mathbb{R}, H(q, v) := \frac{1}{2} \|v\|^2$, calculate the 1-form dH and $dH(Y)$. Find the

unique solution X_H of the equation $\omega_B(X_H, Y) = dH(Y)$, where $Y : P \rightarrow \mathbb{R}^6$ are arbitrary vector fields.

(d) Write out the Hamiltonian differential equation $\dot{x} = X_H(x)$ in position and velocity



coordinates $x = (q, v) \in P$.

9. (10 points) (a) In notation adjusted for $d = 2$, show that the Laplace-Runge-Lenz vector

$$\hat{A}: \hat{P} \rightarrow \mathbb{R}^2, \hat{A}(p, q) := \hat{L}(p, q) \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} - Z \frac{q}{\|q\|}$$

is constant in time and points in the direction of the pericenter.

- (a) Show that $\|\hat{A}\|/Z = e$, where e is the eccentricity from $R(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$

(P5.(1.7)). Prove Equation (1.7) for the conic by using \hat{A} .

10. (10 points) Let the support of the potential $V \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), V \neq 0$ be contained in a ball of radius R , and let

$$\|V\|_\infty := \sup_{q \in \mathbb{R}^d} |V(q)|, \|\nabla V\|_\infty := \sup_{q \in \mathbb{R}^d} \|\nabla V(q)\|.$$

- (a) Show that for all $E > \|V\|_\infty$, with the maximum and minimum speeds

$$v_{\max} := \sqrt{2(E + \|V\|_\infty)}, v_{\min} := \sqrt{2(E - \|V\|_\infty)},$$

the rate of change of direction for a particle with energy E in the potential can be estimated by

$$\left\| \frac{d\theta}{dt} \right\| \leq \frac{\|\nabla V\|_\infty}{v_{\min}}.$$

- (b) Show furthermore that for times $t \in \left[0, \frac{2b_{\min}}{\|\nabla V\|_\infty}\right]$, the distance traveled by the particle

satisfies the two-sided estimate

$$0 \leq t \left(v_{\min} - \frac{1}{2} \|\nabla V\|_\infty t \right) \leq \|q(t) - q(0)\| \leq v_{\max} t.$$

Notes:

- 1: (P20) 2.22 Exercise (Stability)
- 2: (P37) 3.12 Exercises (Single Differential Equations of First Order)
- 3: (P110) Theorem (Symplectic Algebra)
- 4: (P127) 6.45 Exercise (Symplectic Mappings and Subspaces)
- 5: (P140) 7.4 Exercise (Strong Stability)
- 6: (P158) 8.5 Exercise (Legendre Transform)
- 7: (P164) 8.12 Exercise (Bead on a Wire)
- 8: (P220) 10.8 Exercise (Particles in a Magnetic Field)
- 9: (P258) 11.22 Exercise (Laplace-Runge-Lenz Vector)
- 10: (P298) 12.24 Exercise (Scattering at High Energies)



Celebrity Stories 名人故事

杨乐：半个世纪的进与退



杨乐（1939.11.10—2023.10.22）

杨乐，江苏南通人，数学家，中国科学院数学与系统科学研究院研究员。1980年当选中国科学院院士。

在中国，杨乐曾是一代人的偶像。

1977年，他的名字写在《人民日报》头版大标题中，被树立为知识分子典型，一夜之间名动全国。“成为杨乐那样的数学家”，是“60后”“70后”日记本里都写下过的梦想。

3年后，杨乐当选中科院学部委员（院士），是当时最年轻的院士。

科学界的最高荣誉叠加家喻户晓的知名度，杨乐41岁就站上了人生的巅峰。

荣誉和光环往往成就一个人的率性与飞扬，但在杨乐身上却很少看得到，他讷言内敛，低调温和。

现如今，在网络上搜索“杨乐”，条目并不太多。5年前出版的《数海沧桑——杨乐访谈录》是唯一一本关于他的传记书。

别具意味的是，在书中，表彰、升职这些常人孜孜以求的人生喜事，表述出来用的都是“被动语态”——“被宣传”“被动员担任副所长”。这多少可以看出杨乐的人生态



度。只是，当你走近杨乐，了解他在中国数学那段跌宕起伏岁月中的选择、坚持和进击，你又会发现他的另一面，杨乐从来都是一个“主动”的人。

——知进退，内心笃定，清醒而自由。



1977年，杨乐（右）和张广厚一起讨论问题。



2002年8月，杨乐夫妇（后排）与霍金夫妇合影。



1985年，日本皇太子、太子妃接见世界青年峰会的代表。杨乐供图



成名

新冠肺炎疫情之后，李文林和杨乐几乎没怎么见面。

李文林仍清晰地记得疫情前，他们两个近 80 岁的老人走在中关村的街道上。在车水马龙的喧嚣中，杨乐转过脸对他说：“我们这一页已经翻过去了。”

声音不大，却直击心扉。李文林一时间百感交集。

作为在中科院数学研究所（以下简称数学所）共事多年的同事，杨乐说的“这一页”，李文林曾亲身领略过其耀眼光芒带给他的骄傲——

那个年代出差要介绍信，李文林拿着有数学所落款的介绍信去住旅店，都会得到服务员追星般激动的询问：“是陈景润、杨乐、张广厚的那个数学所吗？”

那是 1978 年，中国迎来科学的春天。那年 1 月，刊登在《人民文学》上的长篇报告文学《哥德巴赫猜想》，被视作“春江水暖”的信号。

实际上，较之陈景润，杨乐、张广厚是更早被“官媒”宣传的知识分子楷模。

1977 年 2 月 26 日，《人民日报》头版刊发重要报道《杨乐、张广厚研究函数理论获得重要成果》。这是一篇新华社通稿，当天，杨乐、张广厚的名字出现在全国各大报纸头版的大标题中。

“特自豪，觉得杨乐他们为中科院争了光，更有一种‘臭老九’翻身的喜悦。”1965 年从中国科技大学毕业分配到数学所，一个礼拜后就被派到农村参加“四清”的李文林，几十年后忆起知识分子待遇的“冰火两重天”仍按捺不住兴奋。

青少年循着他们的足迹走上数学之路。北京邮电大学原校长乔建永是 1978 年参加高考的，他的志愿清一色填的是数学。中科院院士袁亚湘也是在这一年进入大学，选择的专业也是数学。

杨乐没有想到宣传会如此铺天盖地，此前只是当作任务配合接受过采访，起因是他和张广厚在美国数学访问团前的一次精彩亮相。

1976 年 5 月，中国邀请美国纯粹和应用数学代表团来访。这是一次具有历史节点意义的访问，新中国成立以来，中美在科技领域首开交流之门。

美国派出 9 位出色的数学家，地位颇高的桑德斯·麦克兰恩担任团长。中国精心组织了 60 多场报告，杨乐的报告是其中之一。

杨乐演讲结束，在代表团起立鼓掌，盛赞杨乐、张广厚的工作“both deep and new”（既深刻又新颖），“评价坐标系”是 50 多年来世界上在复分析、函数值分布理论领域产出的大量成果。

不仅是口头赞誉，代表团访问结束后撰写的 100 多页总结报告中，又将其成果与陈景润对哥德巴赫猜想的论证并列为国际一流。报告里最核心的 5 页评价刊登在《美国数学会通讯》（The Notices of AMS）上。



国内同行惊艳不已，又惊讶万分：“文革”十年，他们是怎么做出这样的成果的？成果是“偷偷摸摸”做出来的。

1966年，杨乐、张广厚的研究生毕业论文即将进入答辩阶段时，“文革”开始了，研究工作全面停顿。

陈景润比较特殊，因为身体不好，他总能从医院开出全病休的假条，占据一个四五平方米的废弃锅炉间，关起门来读点书、做些研究。

其他人就没那么幸运了。直到1972年，周总理过问中科院的具体工作，这才带来一丝曙光。然而，数学所在形式上恢复了研究工作，大多数人还是心有余悸，不敢“明目张胆”地做研究。

数学所一个办公室十五六平方米，坐着五六个同事。为了“掩人耳目”，张广厚在办公室里总显出无所事事的样子，东瞧瞧西看看。

但他俩没有随波逐流。那时杨乐的双胞胎女儿还小，上全托幼儿园，爱人远在北京工业大学上班不能每天回家，杨乐便把所有业余时间都奉献给了数学。生活上就是对付，下班顺手买点菠菜、莴笋之类，洗干净也不炒，用酱油、麻油一拌，煮上米饭就是一顿。1976年唐山大地震，中关村整个楼里的人都跑出去住地震棚，只有杨乐待在楼里沉浸在研究中。

因为敢为，所以成就。命运就是如此偶然又必然。

“在那样的环境下，你们为什么还坚持做科研？”多年后，面对《中国科学报》记者的提问，杨乐反问：“为什么不做科研？”

“这就像彭桓武先生对‘为什么回国’的回答——回国不需要理由，不回国才需要理由。”杨乐说，“我从1956年开始接受高等教育十年，国家在那样困难的条件下提供好的环境，耗费财力和物力培育了我。那时候研究生多‘金贵’啊，我入数学所做研究生的1962年，全所一共招了6名研究生：熊庆来先生有两名，华罗庚先生有4名。那年，北大数学力学系研究生多一些，也不过10名左右。到研究生毕业，我们已经接触到科研前沿了，为什么不继续做？”

转型

说起来，杨乐、张广厚能摘取佳果，除了付出超出常人的努力外，还得益于导师熊庆来的“老马识途”。

熊庆来，中国数学界元老级人物，数学家陈省身、华罗庚、许宝騄，物理学家严济慈、赵忠尧、彭桓武、林家翘、钱三强等都是他的学生。

担任二人导师时，熊庆来已年逾古稀，自谦“不能给具体帮助，但老马识途”。当时国内学术界与国际上几乎没有交流，杨张二人研究领域函数值分布论的最新进展无从得知，但在熊老的指引下，他们通过对法国经典理论的深入钻研，掌握了其中精髓，迅速



接近研究工作的前沿，达到国际先进水平。

杨乐、张广厚、陈景润一举成名后，1978年，数学所恢复招收研究生，招收人数27人，报名人数却高达1500多人，大多是冲着他们三人而来。令人惊讶的是，杨张二人一个没收，接连几年都是如此。

杨乐的想法很简单。学科发展亦如生命体，有萌芽、壮大、兴盛和衰落的过程。函数值分布论从19世纪80年代发展起来，曾是数学的一个主流研究方向，统治数学界多年，其辉煌时法国数学领域的院士有一半在研究它。但杨乐判断，经过半个多世纪，这一领域已过顶峰，接近尾声。自己能做出突出成果是“有运气的”——看准了尚可挖掘的空间，但“强弩之末的方向不宜再引导青年学子投身其中了”。

判断果敢，坚持则更需勇气。杨乐的导师生涯近40年，正式招收的研究生只有7名，加上指导的博士后研究生，一共也就10名左右。

乔建永是杨乐的博士后研究生，他在研究生期间参加一些全国复分析会议时，就多次听到杨乐强调“不要抱着一个老方向不撒手”。“老一代科学家就是有这样的品格，没有把自己研究的领域吹得天花乱坠。他当时就提醒复动力系统很重要，事实也证明，这个领域后来出了好几个菲尔兹奖。”乔建永说。

杨乐也开始尝试转行。中科院院士王元曾说，以杨乐的天分与实力，改行经典解析数论、复动力系统或多复变函数论都不会很困难，再现辉煌也极有可能。

可时代交给这位年轻数学家的，还有更重要的工作。

1978年3月，全国科学大会隆重召开。新闻人物杨乐、张广厚和德高望重的华罗庚、严济慈、钱三强，在同一个组别出席大会。

大会结束后的4月，杨乐、张广厚出国到苏黎世参加学术会议，先去瑞士，再去英国。这又是一次具有历史节点意义的出访，是1966年以来国内学者第一次以个人身份去国外参加学术活动。

1980年，杨乐当选中科院学部委员（院士）。这是自1955年中科院学部成立后，第一次大规模增选——增选了283名学部委员。彼时，此前的250多位学部委员已去世了近一半，余下的也大多年事已高。

当时，国家急需有为中青年，中央反复强调干部年轻化。1981年召开中科院学部委员大会前，时任中科院党组副书记胡克实向邓小平汇报。邓小平特别问道：“有50岁以下的没有？有40岁以下的没有？”胡克实说，最年轻的是杨乐，41岁。

“像杨乐这样德才兼备的年轻数学家被提拔担任一些领导工作是自然的事。所以，从20世纪70年代末开始，杨乐即将相当一部分精力用于此（社会工作）。”在《数海沧桑——杨乐访谈录》序言中，王元这样写道。



推手

1979年夏天，丘成桐第一次回国访问，杨乐接待了他。

菲尔兹奖首位华人得主丘成桐，美国《纽约时报》称其是“数学王国的凯撒大帝”，暗含他在数学世界里勇往直前。在人际圈中丘成桐的个性亦是如此，毫无迂回。

杨乐与丘成桐的友谊持续了40多年。丘成桐赞杨乐是“彬彬君子、忠厚长者”。杨乐说丘成桐有“一个特点、两个优点”。特点是实事求是，不会逢迎他人，对数学界的研究工作和学者总是用“菲尔兹奖的标准”来衡量。“优点是数学水平十分突出，学术品位高；有浓厚的家国情怀，为中国数学发展倾注大量心血。”

杨乐识人有他与众不同的视角，一个“菲尔兹奖的标准”就能让很多“意难平”迎刃而解。

当然，成就二人君子之交的最底层黏合剂还是家国情怀。

当年被树立为典型、被赋予多个职务，杨乐就知道自己那个远离纷扰、潜心数学的梦想不太可能实现了。那就成为让更多年轻人潜心数学、做出成果的推手吧。这未尝不是实现梦想的一种方式。

1996年成立的“中国科学院晨兴数学中心”，便是二人将情怀付诸行动的见证。

1995年，时任中科院常务副院长路甬祥约见丘成桐，希望他帮助中科院办一个类似美国普林斯顿高等研究院研究中心的数学中心，培养祖国的数学研究型人才。晨兴数学中心应运而生。

杨乐经历过闭塞年代，丘成桐拥有国际视野，他们深知交流尤其是国际学术交流的重要性。因此，晨兴数学中心搭起的开放平台迎来了国内的学者、其他院校的学生以及国外活跃的数学家。

成为数学大国，中国数学还要登上世界舞台发出自己的声音。这是杨丘二人的又一个共同心愿。

1993年，丘成桐给杨乐打电话，郑重提出时机和条件已经成熟，中国应该在世纪之交举办一次国际数学家大会（ICM）。ICM四年一次，被誉为数学界的“奥林匹克”。

彼时身兼数学所所长和中国数学会理事长的杨乐，向中科院并通过中科院向国务院提交报告。1994年在“国际数学联盟成员国代表会议”上，杨乐作正式申请发言。1998年经过选举，2002年的ICM花落北京。

2002年8月，ICM在北京国际会议中心隆重召开。大会开幕式主席台上坐着时任国家主席江泽民、时任国务院副总理温家宝、李岚清，如此高的规格在其他国家并无先例。会议规模也超过了以往任何一届，中国有26个城市、2000多名学者参与。

同期，北京还举办了“国际弦理论会议”，由丘成桐、刘克峰筹划。20年后的今天，数理界人士仍津津乐道于那几天的盛况。学术大咖云集北京，美国数学家、《美丽心灵》



的原型纳什来了，被称作国际理论物理学界“双子星座”的英国的霍金和美国的威腾也来了。

杨乐承担了一份艰巨的工作——接待霍金。除了游览长城外，杨乐全程参与霍金在北京的活动，从访问日程、学术演讲到食谱、轮椅尺寸，事无巨细都要作出特殊的安排。其间还发生了惊险的一幕，霍金从杭州飞到北京刚刚到达翠宫饭店时，发生了呼吸困难。杨乐、丘成桐急得团团转，好在霍金不久后恢复了正常。

直到将霍金和夫人送到北京机场握手告别时，杨乐忐忑不安的心才终于放下。

漩涡

1999年1月，杨乐又一次登上头版头条，这次是《南方周末》。

20世纪90年代末，《南方周末》以批评报道、社会监督著称。

这篇报道称，“中国科学院在北京的4个数学类研究所合并，106名正研究员面临‘下岗’。”这在科学界乃至全社会不亚于一场“地震”，人们不明白作为稀缺资源的科研人员为何会下岗。

在这场“地震”里，流传着这样的说法：“下了岗的又上岗，在岗的要下岗。”其中，“下了岗的又上岗”说的就是杨乐。1995年他卸任数学所所长，1998年底中科院成立数学与系统科学研究院（以下简称数学院），杨乐出山担任首任院长。

当时中国正处于“做原子弹的不如卖茶叶蛋的”的年代，“脑体倒挂”现象严重。在北京，出租车司机一个月可以挣2000到3000元，但身为院士的杨乐、王元们，工资只有1800元。不少科研人员受不住清贫而离开，科研院所更是“巧妇难为无米之炊”。

1998年，作为国家创新体系的试点，中科院实施知识创新工程，决定把现有的120余家研究所进行合并、整合，形成80多家研究机构。将4个数学类研究所合并成数学院，是“试点的试点”。

过去4个所每年加起来有经费1000万元左右，合并后可以每年追加2500万元的创新经费。这对从事基础科学的研究院所来说是重大利好。

但改革难度也是巨大的。创新基地有严格的人员名额限定，原来4个研究所有行政人员100人、科研人员400人，创新基地名额只有200个。而且为了保证基地的创新活力，要求平均年龄不能超过40岁。谁进谁不进，触及到个人利益，阻力可想而知。

筹备数学院时，中科院希望杨乐主持合并工作，出任首任院长。

这一年是1998年，杨乐59岁了。

李文林说：“谁都知道这是一件吃力不讨好的事。杨乐是院士，功成名就，他若不担任领导职务，完全可以进入基地，清清静静做自己的研究。

但杨乐还是决定做第一个吃螃蟹的人。困难了然于胸，只是掰手指一算，舍我其谁？4个所里，王元、陆启铿、丁夏畦都是70岁的老人了，马志明、郭雷那时资历尚浅。



“另外也觉得有些壮志未酬。我担任了两任所长，受困于经费没能施展拳脚，这是一个机会。”杨乐说。

经过筹委会讨论决定，进入创新基地的人员待遇大幅度提升，正研在 5000 元左右；未进入基地的待遇也有所提升，从 1000 元提高到 3000 元，可以照常做科研，并不存在“下岗”一说。

第一批进入基地的名单公布后，免不了议论纷纷。但有人不顾事实，捅到了媒体，还散播到国外数学界，甚至对杨乐进行人身攻击……

这些人可能有意无意地忽略了，为了吸引优秀的年轻人，改革中给一线最优秀的青年学术带头人的月薪达万元，而过去数学所工资最高的杨乐、王元等院士是 6000 元。

办公室里媒体打来的电话响个不停，杨乐一个都没有回应。乔建永私下打抱不平：“真不该接这个‘烫手山芋’。”导师杨乐摆摆手，淡淡地说：“总得有人干。改革都是受益者，只是有先有后。”

实际上杨乐承受的压力是巨大的，只有跟老朋友、老同事王元在一起的时候，他才会倒倒苦水，“要不是承担着这样的职责，我宁愿拿从前的工资，在基地之外工作，省得在流言的漩涡中、在是非之地纠缠”。王元安慰杨乐：“机遇难得，要坚持下去。”

杨乐也无心纠结流言是非，他连数学院大楼装修采购电梯的事都在操心。

刘卓军是数学院首任副院长之一，分管基建。一次说到准备购买的电梯是中日合资的，在北京通州有工厂，杨乐带着一张照片就去了，照片里是 1985 年日本皇太子、太子妃接见世界青年峰会的代表，正与杨乐握手。

靠着这块“敲门砖”，杨乐拿到了采购电梯的优惠价。

退出

2002 年底任期结束，杨乐从院长的位置退了下来。

学术上的杨乐同样不“恋战”。70 岁以后，他坚决从具体的研究工作中退出。这一决定与数学的学科特点相关，也源自年轻时的一些观感。

不同于其他科研领域，数学是年轻人的游戏，这是一个残酷的现实。

年轻时杨乐与张广厚看到崇敬的老先生 80 多岁还在发表论文，虽敬佩其精神，但明显感到论文已缺乏新意，与其青壮年时水平相去甚远。于是二人约定，“过了 60 岁就不要勉为其难发表论文了”。

杨乐的夫人黄且圆刚满 60 岁就主动在中科院软件研究所办理了退休手续。

黄且圆出身于世家，祖父是在中国近现代史上留下浓重一笔的黄炎培，父亲是一生忧国忧民的水利学家黄万里。她与杨乐是北京大学数学力学系的同学。

退休后有了充裕的时间，黄且圆决心求解“何以成为大学者”。她的方式是选取在专业领域有突出贡献、人文方面有显著修养的大师级人物，给他们写传记。到 2012 年去



世前，黄且圆写了一些人的传记——胡先骕、孟昭英、陈省身、黄万里、彭桓武、王元、丘成桐。传记结集成书，书名《大学者》。

杨乐深情写下前言、后记，说“《大学者》是对且圆最好的纪念”。

从职务和学术中一步步退出，杨乐自由的时间越来越多。他还经常去办公室，也经常参与数学讨论班，与自己的导师“老马识途”一样，杨乐用自己的学识和经验，指挥年轻人冲锋陷阵。

田野如今是中国数论领域继陈景润之后最优秀的学者之一，他回国加入晨兴数学中心是因为杨乐的电话。也因此，每当研究上有卡顿、思想上有波动时，田野都是抄起电话就打给杨先生。

“几乎没有例外，他会说你现在就来我办公室吧。”田野说，“无论什么话题，杨先生最后总会归结到两点上：大胆探索，不要怕失败；潜心做大问题。这也是我回国后杨先生第一次找我谈话说的两点。杨先生就是有这样的魔力，谈完后那些担忧、焦躁通通都消失了。”

说到这儿，这位数学家还打了两个可爱的比方，“晨兴数学中心是我的‘数学乐园’，杨先生是数学乐园里的‘定海神针’”。

“知人者智、自知者明，杨先生是一直有这样清醒的能力的——未来靠年轻人去书写。”李文林感慨。

随着历史车轮滚滚向前，知道杨乐这个名字的年轻人越来越少了。疫情前杨乐那句“我们这一页已经翻过去了”，一直印刻在李文林的脑海里。

长时间做数学史研究，李文林深知“这一页”的分量。

“我们这一代是新中国自主培养起来的，虽不幸耽误了大好青春，但机会来后，我们真的是在奋起直追。从20世纪70年代到今天，在这半个世纪里，我们从学术的荒漠之中走到了数学大国，无愧于时代！而此间，杨先生的贡献无疑是巨大的。”李文林说。

（原载于《中国科学报》 2022-11-24 第4版 风范）



Popular Mathematics 数学热门话题

ICERM: 10 years later

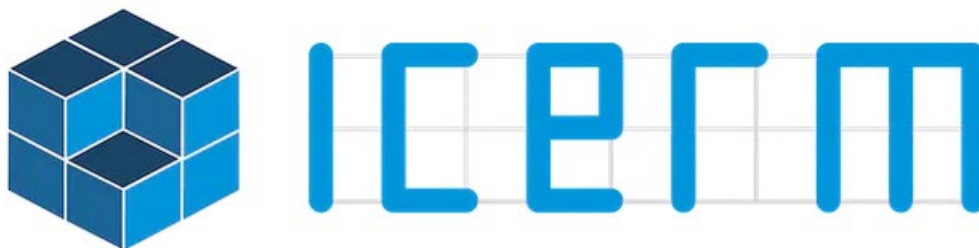
数学计算与实验研究所：2013-2023

(原文链接: <https://euromathsoc.org/magazine/articles/151#cite>)

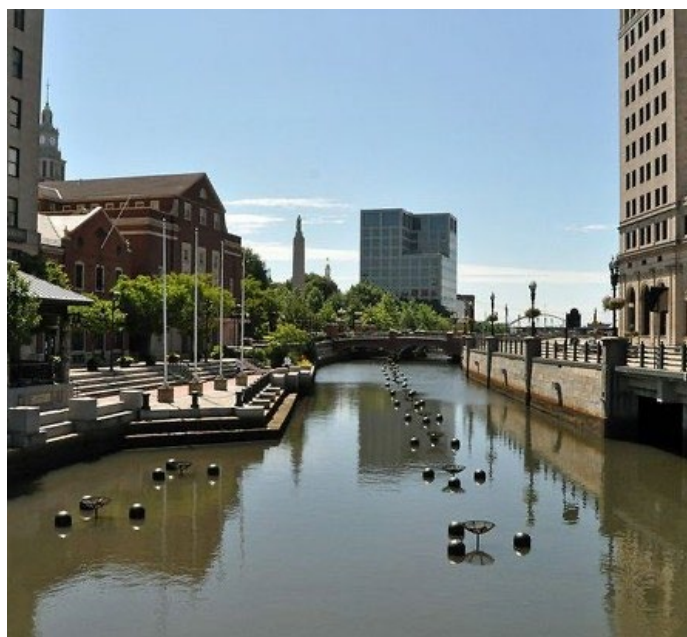
——Benoît Pausader (Brown University, Providence, USA)

Update on the Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics

Ten years ago, in the September 2013 issue of the Newsletter of the EMS, an article presented the newly opened Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics (ICERM). This once fledgling center has now grown into a mature institute, and this article aims to reintroduce ICERM to the international mathematical community, provide an update on its achievements over the last decade, and encourage mathematical scientists of all stages to participate in its future.



Since its opening in Fall 2011, ICERM has run 23 semester programs, 74 topical workshops, 36 public lectures, 12 summer training programs for graduate students and multiple other events. Despite the tumultuous last few years that have forced the organizational team to navigate safety concerns, evolutions in the job market, growing awareness of the climate and social impact of research, ICERM has developed a robust operation that supports organizers as they carry out mathematically rigorous, bold, large-scale programs. With guaranteed funding at least until 2025, ICERM encourages all mathematicians to apply to participate in one of the already planned programs, or to propose an ambitious new one.



ICERM is located on the top floors of a modern building on the waterfront in downtown Providence.

What is ICERM?

ICERM is an institute with core funding from the National Science Foundation (NSF), located in Providence, Rhode Island. Its principal focus is to bring together pure and applied mathematicians from all specialties and all institutions through a variety of programs. At ICERM, participants come together to collaborate, share, and develop ideas and experiments, and formulate and test conjectures to expand the boundaries of science.

Among all NSF institutes, ICERM is uniquely focused on experiments in both pure and applied mathematics. Its mission is to “support and broaden the relationship between mathematics and computation: specifically, to expand the use of computational and experimental methods in mathematics, support theoretical advances related to computation, and address problems posed by the existence and use of the computer through mathematical tools, research and innovation.” As such it seeks, in particular, to disseminate new computer-based tools and to accompany and facilitate emerging topics in mathematics. Its location on the East coast, integrated into one of the largest scientific eco-systems in the world, allows ICERM to stay at the forefront of recent developments and trends.

ICERM is especially devoted to nurturing young researchers in mathematics. In addition to a few institute postdocs, who stay for a year, each semester program supports a large number of



6-months-long postdocs and the program gives a chance to meet and interact with many important people in the corresponding field who can become future colleagues, collaborators or employers. Throughout the year, professional development events are organized about all aspects of academic life and work, as well as about life outside of academia.



ICERM's Fall 2019 semester program "Illustrating Mathematics" included an art exhibition for researchers.

ICERM's amenities

ICERM occupies about 1,800 square meters on the top two floors of a modern glass building overlooking the waterfront, near downtown Providence, RI. It is centrally located near the train station, restaurants, and the Brown University campus. It is an ideal place for lectures and collaboration, with a large, welcoming communal space and an auditorium that can accommodate 120 people and is fully equipped for online recording and participation. In addition, it contains a conference room, a lecture room and 25 offices for long-term participants in a lower story, with floor to ceiling blackboard-paint on the walls to allow the free flow of ideas and spontaneous discussions and collaborations. For special programs, additional resources can be secured (such as 3D printers for a semester focused on art and mathematics).

The institute provides all long-term visitors with access to a broad range of compilers, numerical libraries, mathematical problem-solving environments, visualization software, statistical packages, and productivity software hosted in a virtual desktop and/or terminal based environment. Additionally, all long-term visitors are given exploratory level access to Brown's high performance computing resources. The goal is to provide participants with a wide variety



of tools to experiment with and allow them to sample options that may not be otherwise familiar, in order to maximize potential avenues for research.

In addition, ICERM's IT team works with program organizers to tailor technical offerings to support their vision. This may include leveraging resources at Brown in a customized way, like reserving GPU nodes for computer operations or standing up containerized environments, utilizing cloud-based services like CoCalc and Overleaf, standing up custom systems using Microsoft Azure or Amazon Web Services, or acquiring and supporting physical tools such as 3D printers and VR headsets.

Global pandemics notwithstanding, most programs are in person. However, talks are streamed live on the website, where many recordings of past presentations can also be found.

Programming at ICERM

ICERM hosts a variety of events whose formats vary from one-day meetings to semester-long programs. The following are the principal types of activities, usually involving participants from all over the world.

Semester programs are the backbone of the institute. Programs are selected from applications made by teams of mathematicians from anywhere in the world, and typically organized 2 to 3 years in advance. They bring together about 20 senior participants and a similar number of junior participants who stay in residence for the semester, and about 100 shorter-term visitors, who stay from a few days to a few weeks.

Topical workshops are the shorter, smaller equivalent of the semester programs. They are organized 12 to 18 months in advance and bring together about 30 specialists for a week of conference, collaboration, discussion and/or training.

Hot topic workshops are ICERM's rapid-response mechanism to host workshops that can be organized in a matter of weeks to keep up with, and maximize the impact of, a recent breakthrough.

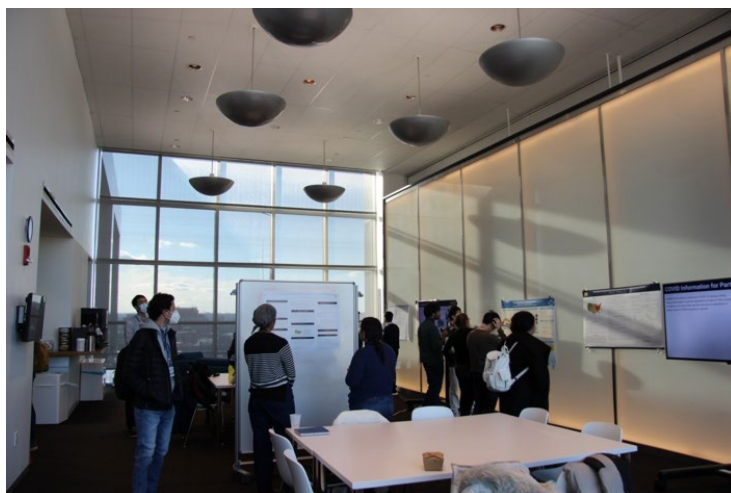
Collaborate@ICERM brings together about 3 to 6 researchers to meet in person to continue an



existing collaboration. This is an ideal setting to finish or expand on a collaboration initiated during one of the other ICERM programs.

Summer@ICERM is an eight-week summer program where 2 to 4 faculty organizers lead a team of about 20 undergraduate students on a research project.

Public lectures invite an expert to speak to a large audience on a topic relevant to non-mathematicians to spread awareness of, and interest in, mathematics in the broader public.



Early-career researchers gather for a poster session in ICERM's communal space.

ICERM is administratively part of Brown University and ICERM's Director, Brendan Hassett, is a permanent faculty member of Brown. From a scientific standpoint, ICERM is largely independent of the university (and the mathematics and applied mathematics departments within) and has a mission to serve the broader community of mathematicians in the US and beyond. The focus on research topics of international significance is guaranteed by Advisory Boards whose members are not affiliated with the university.

ICERM in numbers

As per geography, many (about two-thirds) of ICERM visitors are from America, but the rest come from overseas, principally Europe (more than 20%), and participants and organizers from all over the world are welcome. ICERM is primarily devoted to the whole mathematical community but brings mathematics to the local population through public lectures and the *GirlsGetMath@ICERM* programs.



ICERM can and has partnered with other institutes throughout the world and has helped organize events in India, Japan, Singapore, and South Africa.



High school students in ICERM's GirlsGetMath program play cards in the ICERM communal space.

The institute actively promotes diversity during all its events. It regularly hosts the Blackwell–Tapia conference (in 2012 and 2018) as well as the Modern Math Workshop (in 2011, 2013 and 2017), and the Conference for African American Researchers in the Mathematical Sciences (2015). The institute is interested in all topics in interaction with mathematics. The themes of past workshops have ranged from “Computational Aspects of the Langlands Program” to “Illustrating Mathematics,” from “Computational Biology” to “Knot Theory,” and from “Data Science and Social Justice,” to “Global Arithmetic Dynamics” and “Computational Aspects of Water Waves.” No topic is off the table!



Participants attend a workshop in ICERM's Lecture Hall.



Organizing a semester

Most ICERM activities are relatively easy to organize, thanks to the support of the experienced team of full-time staff. Semester programs are the most demanding for the organizers, but typically follow several steps that we outline below.

(i) The most important task is to bring together a team of (6–10) organizers around a current mathematical topic. When planning, organizers should consider other institutes' programming schedules, so that as many researchers in the field as possible will be able to attend. Workshops should strike a good balance between theory and application. A diverse group of organizers is encouraged.

(ii) The organizers submit a proposal to the Scientific Advisory Board. Once a program is accepted and there has been an opportunity for feedback, a date will be agreed upon. Programs typically occur two years after acceptance.

(iii) Over the next year, the organizers start to advertise the program and converge on a list of senior participants. The main challenge at this stage is to informally secure the presence of key long-term participants and to make sure that young mathematicians are aware of the application timeline for the postdoctoral positions.

(iv) About a year before the start of the program, invitations are sent to most participants to secure their stay. Accepted postdoctoral fellows are notified in the spring before the program (ICERM postdocs are selected from a pool of applicants on Mathjobs.org).

(v) Around this time the general structure of the program is also finalized. Usually, a program is structured around 3 week-long workshops. The themes and organizing teams of these workshops are decided. In addition, appropriate steps for ensuring a diversity of participants and promoting the development of junior attendees are put in place.

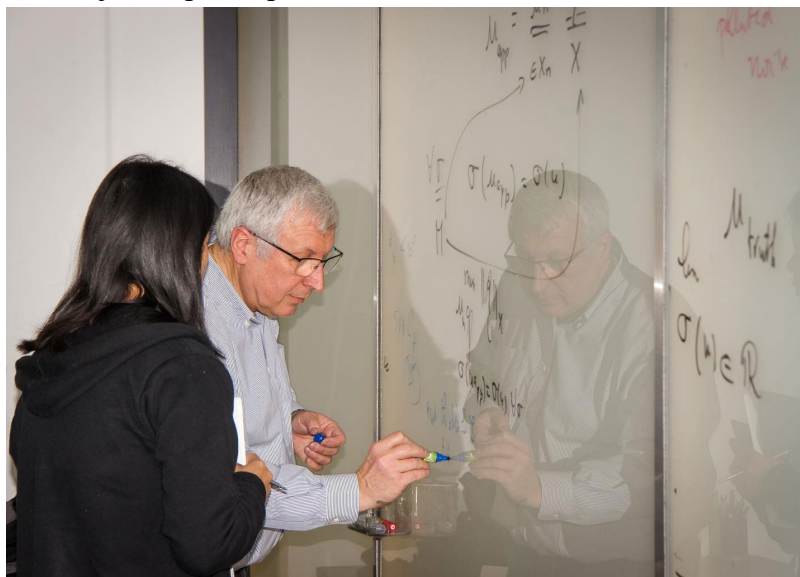
(vi) About 6 months before the beginning of the program, invitations are sent for the workshops, and to short-term participants.

(vii) At the beginning of the semester, the organizers finalize additional events taking place



outside of the workshop weeks, e.g., regular seminars throughout the semester and working groups. They also assign mentors to each of the junior participants.

(viii) Throughout the semester, the ICERM staff will organize regular activities and career-building events for the junior participants.



Many of ICERM's walls double as workspaces for researchers.

These broad guidelines are flexible and can be adapted depending on the needs of the program. For instance, a program with a significant industry interface where the people concerned may not be able to come to Providence for an extended time can involve Research Clusters, which are intensive, several weeks-long events more adapted to the industry timeline.

Conclusions

We hope that this article inspires mathematicians to participate in or organize a program at ICERM. All areas of mathematics, especially nascent and developing mathematical fields, are supported. One of the goals of ICERM is to nurture experiments, help produce conjectures or look for counterexamples and set up standards for explorations of new mathematics. ICERM is the perfect place to explore and create new horizons in mathematics!



Flow Proof Helps Mathematicians Find Stability in Chaos

流动证明帮助数学家在混沌中找到稳定性

(原文链接:

<https://www.quantamagazine.org/flow-proof-helps-mathematicians-find-stability-in-chaos-20230615/>)

——钟永海翻译

一系列新论文描述了如何用相对较少的数据重建关键动力系统。

与数学中的许多东西一样，证明始于咖啡。2019年9月，康奈尔大学的凯瑟琳·曼恩访问了安大略省金斯敦，在皇后大学做客座演讲。之后，她和主人托马斯·巴瑟尔梅坐下来喝杯咖啡。他想听听她对他正在研究的一个问题的看法，这个问题涉及称为动力系统的数学模型，这些模型描述了像钟摆的来回运动这样简单的现象，或者像天气一样复杂地随时间演变。

不知不觉中，几个小时过去了。“我们只是坐在这家咖啡店里，画画，我们每个人都试图弄清楚对方想说什么，”曼恩说。“一开始，我就想，这家伙毫无意义。”但随着他们学会说对方的数学语言，两人都对找到解决方案的机会变得更加乐观。

曼恩并不总是喜欢数学——小时候，她不擅长算术——但正是这种对话最终促使她学习数学。虽然最初对从事哲学事业感兴趣，但她意识到这并不合适。对于哲学家来说，“富有成效的讨论意味着用别人的立场来检验你的立场，”她说。“数学正好相反。你和某人交谈，你们从一开始就在同一个团队。如果有人说，“那样行不通，”你会说，“哦，告诉我更多。我发现这种话语模式要好得多。

巴瑟尔梅对称为 Anosov 流的特殊动力系统感兴趣，这些系统自然地出现在数学的许多领域，并充当重要的玩具模型。这些系统在一个地方展示了看似矛盾的属性：混乱和稳定；刚性和柔韧性；在底层拓扑荒野中存在固有的几何结构。

这些属性中的每一个都出现在数学家几个世纪以来一直想要了解的动力系统中，从行星围绕太阳的运动到疾病在人口中的传播。但在这样的系统中，解开这些不同的特征变得无可救药地复杂。Anosov 流在 1960 年代被定义为研究对象，因为它们在极端程度上表现出这些重要行为，使它们更容易分析。“你希望一旦你对这个案件有了完美的了解，你就可以回到混乱的现实世界，用新的眼光来对待它，”曼恩说。

“在动力系统理论的开始，Anosov 流就像灯塔一样告诉你应该去哪个方向，”法国里昂高等师范学院的艾蒂安·吉斯说。

然而，它们一直难以理解。尽管数学家在过去 60 年中取得了很大进展，但他们仍然远未达到曼恩所说的完美图景：对所有不同类型的 Anosov 流进行分类。

现在，在最近的一系列论文中，巴瑟尔梅和曼恩以及圣路易斯华盛顿大学的史蒂文



弗兰克尔朝着这个难以捉摸的目标迈出了惊人的一步。通过将有关运动和形状的问题翻译成代数语言，他们表明完全和唯一地确定给定的 Anosov 流所需的数据相对较少。（他们的结果也适用于相关但更一般的动力系统，称为伪阿诺索夫流。隐藏在所有这些混乱中，他们找到了结构。

数学家们已经将他们的结果应用于解决有关阿诺索夫流的关键问题——即如何构建它们，以及它们的数量。“有时结果很重要，因为它们确实为这个问题提供了新的观点，”乌拉圭共和国大学的数学家拉斐尔·波特里说。“这就是这里发生的事情。”

一、几何透视

自 19 世纪末以来，当亨利·庞加莱在天体力学方面的工作启动了现代动力系统理论以来，数学家们一直通过几何学的视角来思考动力学。

考虑一个钟摆。独自一人，它垂直悬挂，一动不动。但是如果你抬起它并放手，它会来回摆动。在给定的时刻，钟摆的状态可以通过两条信息来捕获：它与垂直悬挂位置的角度和它的速度。因此，您可以将钟摆的所有可能状态表示为平面上的点，这称为状态空间。

如果你从这些点中的任何一个开始，微分方程（基于牛顿运动定律）会告诉你钟摆的角度和速度将如何随时间变化。这种运动被一条曲线或“轨迹”捕获，这条曲线或“轨迹”缠绕在状态空间中。如果你改变钟摆的起始角度和速度，你将在状态空间中获得不同的轨迹。

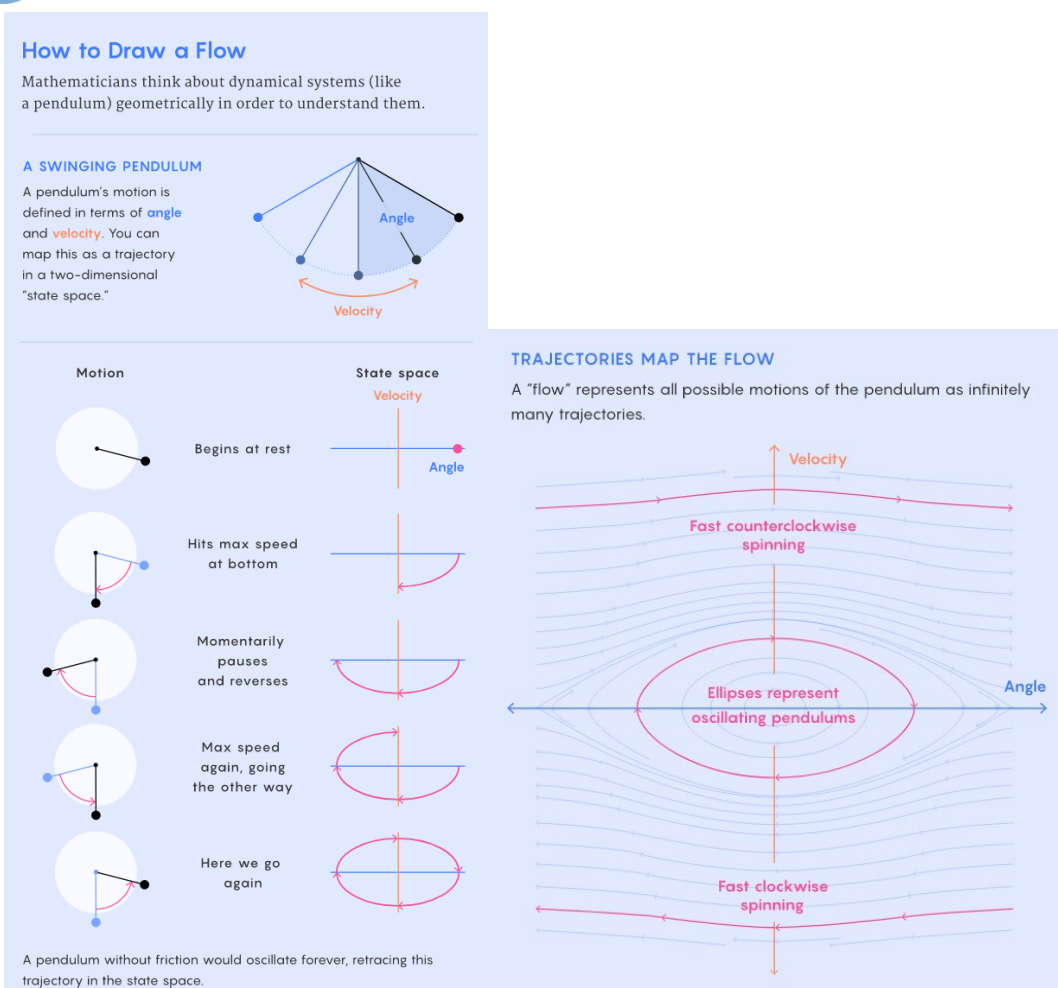
您想将所有此类轨迹作为单个数学对象进行研究。这种对动态系统进行编码的几何方式称为“流”。与其考虑钟摆在空气中划出弧线，不如通过分析流动来研究它的行为。在这种情况下由嵌套椭圆（每个椭圆表示钟摆可以来回摆动的方式）以及这些椭圆上方和下方的曲线（表示钟摆像风车一样快速旋转的场景）组成。

但是流可能会变得更加复杂，涉及复杂的高维状态空间。以 100 个粒子在太空中移动和相互作用为例。捕获其行为的流是通过 600 维状态空间的无限多个轨迹的集合。

（要描述一个粒子的状态，你需要六条信息：三个数字表示它的位置，三个数字表示速度。因此，一次描述所有 100 个粒子需要 600 个数字。

为了开发研究这些更复杂的系统的工具，数学家需要正确的测试场——系统足够简单，可以理解，但又足够复杂，可以反映他们真正感兴趣的属性。

这就是 Anosov 流发挥作用的地方。



二、全球稳定，局部混乱

甚至在庞加莱 19 世纪的工作改变了动力系统的研究方式之前，数学家就对粒子采用最短路径的系统感兴趣：即所谓的测地线。在平面上，粒子沿着一堆直线；在球体的表面上，它们沿着大圆圈行进。曲面的拓扑或全局形状会影响这些路径的外观。

测地线流描述了粒子在不受任何外力影响时可以移动的所有可能方式。一般来说，状态空间是四维的：其中两个维度对应于粒子的物理位置，而另外两个对应于它的移动速度。但是，如果你愿意抛弃一些信息——例如，如果你不在乎粒子的移动速度有多快，而只关心它在任何时候朝向哪个方向——你可以用三维状态空间来描述它的运动。两个维度描述它的位置，第三个维度代表它面对的方向。这就是数学家经常思考测地线流的方式：作为通过三维状态空间的轨迹集合。

这些流动激起了数学家的兴趣，原因有很多。自 1800 年代后期以来，它们使几何学家和拓扑学家能够更好地了解非常复杂的表面的结构——这些表面太难直接研究，但当你观察粒子如何在它们上移动时，它们变得更加容易处理。它们对动力学家同样重要，因为物理学中的许多机械系统都可以表示为测地线流。

到 20 世纪初，法国数学家雅克·哈达马尔开始研究“负弯曲”表面上的测地线流

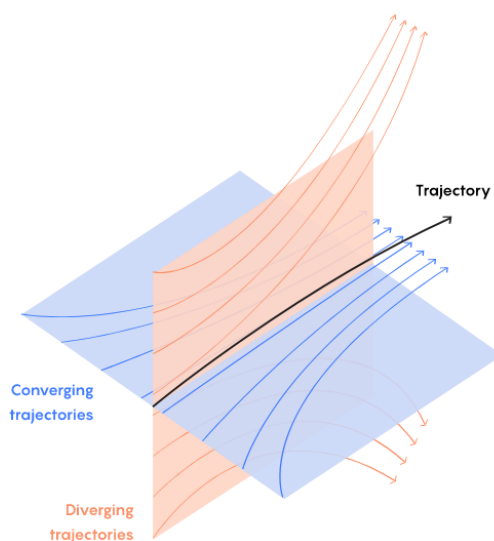


动——即在任何给定点看起来像马鞍的表面。（这也许是不可能可视化的，但在数学上很有用。他发现这种测地线流动总是混沌的：如果你稍微调整一个粒子的初始位置，它最终将处于一个截然不同的轨迹上，这意味着你无法预测系统的长期行为。（另一方面，球体表面上的测地线流不具有此属性。

“在某些方面，这些系统...非常混乱，”澳大利亚莫纳什大学的安迪海马兰德说。

在 1960 年代，俄罗斯数学家德米特里·阿诺索夫在哈达马尔的工作基础上观察到，如果你稍微调整定义测地线流的方程，所有的轨迹都会稍微移动一下：你可以在不改变其整体结构的情况下将原始流动摆动到新的流动中。在典型情况下，这种结构稳定性绝不是可以保证的——但对于这类测地线流来说，这是有保证的。“口号是‘全球稳定，地方混乱’，”曼恩说。“在动力学方面，你对这种稳定和混沌的汇合非常感兴趣。这两者在许多动力系统中共存，达到了一种微妙而关键的平衡，自庞加莱研究太阳系以来，数学家们一直试图解开这种平衡。

阿诺索夫发现，混沌和稳定性在测地线流中都会自动产生，因为它的轨迹在挤压在一起并伸展时会像在太妃糖上绘制的线一样收敛和发散。



At any given point on an Anosov flow, trajectories converge in one direction (shown in blue) and diverge in the other (shown in red). This converging and diverging behavior occurs at every point in the Anosov flow, giving rise to many other properties of interest.

阿诺索夫通过写下这种类似太妃糖行为的特定数学条件，概括了负曲面上测地线流动的概念。这些广义的流动现在以他的名字命名。负曲面上的任何测地线流都是一个。但阿诺索夫认为，可能有一连串的动力系统以这种方式运作。

虽然这个定义可能看起来很奇怪，但这种拉伸和压缩可以在许多动力系统中找到。但在这些背景下，它并不那么明显或无处不在。在 Anosov 流中，类似太妃糖的行为无处不在——使其成为一种极端情况，因此是开发新工具和见解的特别好的模型系统。



正如科学家在转向人类之前可能会试图了解果蝇的基因表达一样，数学家已经证明了阿诺索夫流中关于地形、统计和其他性质的结果，然后将这项工作扩展到其他动力系统。例如，在 1970 年代，数学家利用他们对 Anosov 流（和相关系统）的了解，对什么样的流动可以表现出结构稳定性提出了一个猜想。在 1990 年代，东京大学的林修平证明了这是真的。

三、识别快捷方式

阿诺索夫只能想出另一个符合他标准的系统家族。但从那以后，数学家们发现了一个庞大的例子动物园。（其中大多数是三维状态空间中的流动。高维 Anosov 流仍然知之甚少。）

数学家希望完全理解 Anosov 流：找到它们的所有例子，分析它们的结构，评估哪些空间可以支持它们，哪些不能，并确定在给定空间中可以存在多少不同的流动。

但要做到这一点，他们首先需要掌握基础知识——这包括找到一种表征给定 Anosov 流的好方法。

这就是巴瑟尔梅、弗兰克尔和曼恩现在所做的。

把阿诺索夫流想象成一个由无限多个轨迹组成的复杂纠结，它们像纱线一样共同填充了一个三维状态空间。这个状态空间就是所谓的流形。如果你放大它的任何部分，它看起来像规则的三维空间，但在全球范围内，它可能有一个非常复杂的结构，充满了孔和其他奇怪的特征。

流形中的一些轨迹会回到自己身上，表示粒子最终如何返回其初始状态（在表面上占据相同的位置并指向相同的方向）。然而，大多数轨迹永远不会回到同一个点：它们没有形成一个封闭的轨迹，而是无限期地蜿蜒，一条永远不绕开的线索。

三位数学家证明，对于大多数 Anosov 流（以及伪 Anosov 流），只知道封闭的或“周期性”的轨迹，就可以完全确定整个系统。“你不会因为去做这个更简单的事情而损失很多，”弗兰克尔说。“它实际上是在捕获所有信息。有一些例外，但在这些情况下，三人表明你只需要一条额外的信息来表征流程。

这项工作提供了一种判断两个不同流是否等效的方法——也就是说，是否有一种特定的数学方法可以将一个流中的每个轨迹转换为另一个流中的轨迹。你不能一个轨迹一个轨迹手动检查；你需要一个快捷方式，一种用较少的信息识别流的方法。

为了获得这个捷径，巴瑟尔梅，弗兰克尔和曼恩转向拓扑学家经常使用的代数中的关键工具：基本群。

四、代数的翻译

基本群实际上是流形（及其所有组合）上的循环列表，它们对有关流形形状的信息进行编码。考虑一个甜甜圈或圆环的表面——一个二维流形。您可以通过从圆环上的一个点开始，穿过孔，然后回到开始的地方来构建一个循环。如果你不是穿过洞，而是绕



过它，你就形成了第二个循环。环面的基本群是这两个环的集合及其所有组合（例如，您可以想象绕孔两次，或者穿过孔一次然后绕圈，等等）。3D 流形的基本群变得更加复杂。

给定 Anosov 流中的每个周期轨迹对应于基本组中表示的一类循环。根据巴瑟尔梅，弗兰克尔和曼恩的说法，对于大多数 Anosov（和伪 Anosov）流，知道这个子集足以让你重建整个流。你甚至不需要知道某些轨迹是否交织在一起，或者给定的周期轨迹有多少个副本。仅从周期数据中，您就可以构建流——首先获取对流的各个方面进行编码的一维和二维对象，最后获取三维流本身。

“这对我来说是一个惊喜，”巴瑟尔梅说。“我认为人们会猜到这不应该是真的，因为它是相当弱的信息。”

这就是这项工作如此吸引人的原因。“如果你随机选择一个轨迹，它会密集地填满空间。周期性轨迹不会这样做。他们回到他们开始的地方，看不到大部分空间，”芝加哥大学的艾米威尔金森说。然而，如果你把这些周期性的轨迹放在一起，你就可以理解流动的完整结构。“这就是结果的美妙之处。”

在 Anosov 流中仍有无限多的周期轨迹。但这个无限数是“可数的”——比“不可数”的轨迹总数要小的无穷大。这类似于数字 1 和 2 之间有无限多个分数，但更多无理数，如 $\sqrt{2}$ 在那个间隔内。因此，将流量简化为仅其周期轨迹可用于评估两个系统是否等效。

巴瑟尔梅，弗兰克尔和曼恩也发现了他们规则的例外：在某些情况下，两个流可能不同，同时具有相同的周期轨迹。但事实证明，这些异常具有非常特殊的结构，数学家能够确定只需要再提供一条信息来表征它们。

自从去年年底完成他们的证明以来，巴瑟尔梅和曼恩与佛罗里达州立大学的数学家塞吉奥芬利合作，他对 Anosov 流进行了大量研究，以充分表征这些异常。在他们尚未在网上发布的一篇新论文中，他们列出了导致这些更复杂的流程的情况。在这样做的过程中，他们不仅依赖于之前的结果，而且还最终构建了新的流，这些流共享一个有趣的属性：它们不能通过它们的周期数据来完全表征。“这太神奇了，”波特里说。“这就像天文学：有时你正在研究行星的轨道，通过更好地了解它们，你会发现那里应该有一些你不知道的行星。这告诉你把望远镜对准，这样你就能看到它。我认为这发生在这项工作中。”

“它实际上提供了一种非常干净的方式来结束这个主题，”芬利说。“有一种坏物体可能发生，但事实证明，坏物体并没有那么糟糕。”

五、计数和分类

包括 Potrie 和芬利在内的几位数学家已经使用巴瑟尔梅，弗兰克尔和曼恩的结果来完成有关相关动力系统的其他证明。



巴瑟尔梅和曼恩也利用他们的工作在关于 Anosov 流的最大悬而未决的问题之一上取得了进展：给定的 3D 流形是否有可能支持无限数量的不同 Anosov 流？

正如河岸的轮廓会影响河流中水的可能流动方式一样，流形的结构也会影响可能的动态流动类型。（白水急流不会出现在宽阔、平坦的平面上。）

众所周知，许多 3D 流形根本不能作为任何阿诺索夫流的状态空间。几年前，曼恩和德国雷根斯堡大学的数学家乔纳森·鲍登证明，对于你选择的任何有限数量——15 个不同的流，或者 000 万个，或者 15 亿个——你都可以找到一个至少有很多不同流的 15D 流形。（另一组独立展示了这一点。）

但是仍然不知道你是否能找到一个具有无限多个不同阿诺索夫流的流形。巴瑟尔梅和曼恩通过将他们的新工作与接触几何领域的其他最新结果相结合，证明了一个特例。

“在这个界面肯定有事情在酝酿，”塔夫茨大学的鲍里斯·哈苏布拉特说。“这是新的，令人兴奋的。”

这一切都有望有助于实现对 Anosov 流（包括高维流）进行分类的长期目标。但它也为研究提供了新的方向，并使数学家更好地理解拓扑和动力学之间的关系。根据 Potrie 的说法，研究这些周期性数据及其相应的群体结构本身将是很有趣的。“有很多问题被打开，只是因为定义了对象，这个提取，”他说。“现在我们需要了解它。”



Why Mathematicians Re-Prove What They Already Know

为什么数学家要再次证明他们已经知道的内容

(原文链接:

<https://www.quantamagazine.org/why-mathematicians-re-prove-what-they-already-know-20230426/>)

——樊浩杰翻译

许多人学习到的第一个证明是早在高中学校学到的古希腊数学家欧几里得的证明：有无限多的素数。证明仅仅几行，使用概念不会比整数和乘法复杂。

他的证明依赖这个事实：如果有有限多素数，把它们全部相乘再加 1，意味着另外一个素数的存在，这个矛盾暗示了素数肯定无限多。

数学家们有一个好奇的受欢迎娱乐：一遍一遍的证明它。

为什么要自寻烦恼去做这件事？一方面，这很有趣，更重要的是，“我认为娱乐数学和严肃数学之间的线很窄，”马里兰大学计算科学教授威廉·加斯卡奇在今年早期发表在网上一篇新证明的说法。

加斯卡奇的证明只是长篇小说中最新的证明。在 2018 年，黑山大学的 Romeo Meštrović，在一个历史综合性调查中，编写了将近 200 种证明。事实上，整个分析数论领域，使用连续变化的量来研究整数，起源于 1737 年，当时数学大家欧拉利用无穷数列 $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots$ 发散（和不是一个有限数），再次证明了有无穷多素数。

Christian Elsholez 是澳大利亚 奥地利格拉茨科技大学一名数学家，他也是最近另一个证明方法的作者，他认为与其从许多更小的结果里证明困难结论——即数学家系统地组装引理成为定理，不如做相反的事情。“我使用的费马大定理，这是一个不平凡的结论，然后我得到了一个非常简单的结果。”他说像这样反向证明可以揭示不同数学领域内隐藏的联系。

蒙特利尔大学的数学家 Andrew Granville 以及另外两种证明的作者说：“有很少的比赛是去为了那些有可笑地困难证明的人，这必须有趣。重点不是去做一些有技巧的糟糕的事情，你想做一些困难事情的唯一方式这是有趣的。”

Granville 说，对这个单边的友善的高超技艺，有一个严肃的指向。研究者不仅仅研究他们尝试解决的问题，“数学中的创造过程不是这样，你仅仅给机器发送一个任务后机器解决它，这是一些人拿他们过去已经做的事情然后用它去创造一个技艺以及创造一种发展想法的方式。”

正如 Gasarch 说：“所有的论文，从一个新的可爱的证明素数是无限的继续向前进入严肃数学。有一天你仅仅看素数，然后另一天你看平方密度。”



Gasarch 的证明基于这个事实：如果你用有限的颜色给整数上色，则总会有一对数有相同的颜色，并且和也是这个颜色，这被 Issai Schur 在 1916 年证明出来了。Gasarch 使用 Schur 的理论展示出：如果有有限个素数，那么会存在一个完全立方数（一个整数，例如 125，与一个数与自己相乘三次相等）是另外两个完全立方数之和。但是追溯到 1770 年，欧拉已经证明了没有这样的立方存在—— $n=3$ 情况下的费马大定理，即指出对 $a+b=c^n$, $n>2$ 时没有整数解。基于这个矛盾，Gasarch 解释了必须有无限多素数。

Granville 2017 年的证明使用了费马的另一个定理。Granville 主要依赖 Bortel Leendert van der Waerden 在 1927 年提出的一个定理，展示出如果你用有限个颜色给整数上色，总会存在任意长的等距同色整数链。和 Gasarch 一样，Granville 开始的假设是素数是有限的，接着他使用 van der Waerden 的理论去寻找一个四个等距，同色的完全平方数序列。但这不可能存在的。矛盾！因为如果有有限个数的素数，这样的数列是可以存在的，但它不可能存在，所以一定有无限个数的素数。Granville 的证明是最近第二个利用了 van der waerden 的定理——Levent Alpöge，现如今是哈佛大学博士后，也同样在 2015 年发表的一篇文章中使用了这个定理，当他还在上大学。

Granville 是 Elsholtz 论文特别的一个粉丝，那个论文同样应用了费马大定理，并且有素数有限这个反事实假设。和 Gasarch 一样，Elsholtz 合并了 schur 的理论，尽管是以一个不同的方式，Elsholtz 同样使用 1953 年 Klaus Roth 的理论给了第二个证明，即说明一系列整数超过一定大小必是包含三个均匀整数。

一些深入甚至实践的数学问题一定被基于这项工作回答。例如：公钥加密依赖的大数分解困难问题就会非常容易攻克，如果我们生活的世界有很多素数。Elsholtz 想知道是否在证明有很多素数与证明攻克这种加密方案的困难程度之间有一些联系。“这与欧几里得定理上有些微弱联系”，Elsholtz 说。“去观察更深入的联系会很有趣。”

Granville 说最好的数学可以从不同领域和学科奇怪组合中生长出来，并且通常出现在数学家花很多年时间沉浸在低级但有趣问题上之后。他着迷于似乎偏远的学科可以应用于数论上这个事实。在一个最近研究中，Granville 表扬了 1955 年 Hillel Furstenberg 的“稀疏优数”证明，这使用了点集拓扑。和 Alpöge 一样，Furstenberg 的证明发表时还在上大学，他将继续在各种数学问题上取得各种成就。

Granville 反问道：“欧几里得旧结果的新证明是仅仅出于好奇或者有一些更长远的重要性的东西”，回答他自己问题时，他说：“我不能告诉你。”



The Deep Link Equating Math Proofs and Computer Programs

将数学证明等同于计算机程序的深层链接

(原文链接：<https://www.quantamagazine.org/the-deep-link-equating-math-proofs-and-computer-programs-20231011/>)

——方程翻译

一些科学发现之所以重要，是因为它们揭示了一些新的东西——例如，DNA 的双螺旋结构，或者黑洞的存在。然而，有些启示是深刻的，因为它们表明，两个曾经被认为截然不同的旧概念实际上是相同的。以詹姆斯·克拉克·麦克斯韦 (James Clerk Maxwell) 的方程为例，该方程表明电和磁是单一现象的两个方面，或者广义相对论将引力与弯曲时空联系起来。

库里-霍华德的通信也做了同样的事情，但规模更大，不仅将一个领域内的独立概念联系起来，而且将整个学科联系起来：计算机科学和数理逻辑。它也被称为库里-霍华德同构（一个术语，意思是两个事物之间存在某种一对一的对应关系），它在数学证明和计算机程序之间建立了联系。

简单地说，库里-霍华德通信假设计算机科学中的两个概念（类型和程序）分别等同于命题和证明——逻辑中的概念。

这种对应关系的一个后果是，编程——通常被视为一种个人手艺——被提升到数学的理想化水平。编写程序不仅仅是“编码”，它还是一种证明定理的行为。这使编程行为正式化，并提供了对程序的正确性进行数学推理的方法。

这封信是以独立发现它的两位研究人员的名字命名的。1934 年，数学家和逻辑学家哈斯克尔·库里 (Haskell Curry) 注意到数学中的函数与逻辑中的隐含关系之间的相似性，后者在两个命题之间采用“if-then”语句的形式。

受到库里观察的启发，数理逻辑学家威廉·阿尔文·霍华德 (William Alvin Howard) 在 1969 年发现了计算和逻辑之间更深层次的联系，这表明运行计算机程序很像简化逻辑证明。当计算机程序运行时，每行都会被“评估”以产生单个输出。类似地，在证明中，你从可以简化的复杂陈述开始（例如，通过消除多余的步骤，或用更简单的表达式替换复杂的表达式），直到你得出一个结论——一个从许多临时陈述中得出的更简洁的陈述。

虽然这种描述传达了对应关系的一般意义，但要完全理解它，我们需要更多地了解计算机科学家所说的“类型理论”。

让我们从一个著名的悖论开始：在一个村庄里，住着一个理发师，他给所有不刮胡子的男人剃胡子，而且只给她们剃毛。理发师会自己刮胡子吗？如果答案是肯定的，那



么他就不能给自己刮胡子（因为他只给不刮胡子的人刮胡子）。如果答案是否定的，那么他必须给自己刮胡子（因为他给所有不刮胡子的人剃光头）。这是伯特兰·罗素（Bertrand Russell）在试图使用称为集合的概念建立数学基础时发现的悖论的非正式版本。也就是说，在不遇到矛盾的情况下，不可能定义一个包含所有不包含自身的集合的集合。

为了避免这种悖论，Russell 表明，我们可以使用“类型”。粗略地说，这些类别的特定值称为对象。例如，如果有一个名为“Nat”的类型，即自然数，则其对象为 1、2、3 等。研究人员通常使用冒号来表示物体的类型。数字 7 是整数类型，可以写成“7: 整数”。可以有一个函数，该函数采用 A 类型的对象并吐出 B 类型的对象，或者将 A 型和 B 型的一对对象组合成一种新类型，称为“A×B”。

因此，解决这个悖论的一种方法是将这些类型放入层次结构中，这样它们就只能包含比它们自身“更低级别”的元素。然后，类型就不能包含自身，从而避免了产生悖论的自我引用性。

在类型论的世界里，证明一个陈述是真的可能看起来与我们习惯的不同。如果我们想证明整数 8 是偶数，那么就需要证明 8 确实是一个称为“偶数”的特定类型的对象，其中成员规则可以被 2 整除。在验证了 8 可以被 2 整除之后，我们可以得出结论，8 确实是偶数类型的“居民”。

库里和霍华德表明，类型从根本上等同于逻辑命题。当一个函数“驻留”在一个类型中时——也就是说，当你能够成功地定义一个作为该类型对象的函数时——你就有效地证明了相应的命题是正确的。因此，接受 A 型输入并给出 B 型输出（表示为 A 型 → B 型）的函数必须对应于一个含义：“如果是 A，则 B”。例如，以“如果下雨，那么地面是湿的”这个命题为例。在类型论中，这个命题将由类型为“Raining → GroundIsWet”的函数建模。看起来不同的公式实际上在数学上是相同的。

尽管这种联系听起来很抽象，但它不仅改变了数学和计算机科学从业者对他们工作的看法，而且还导致了这两个领域的一些实际应用。对于计算机科学来说，它为软件验证提供了理论基础，即确保软件正确性的过程。通过用逻辑命题来构建期望的行为，程序员可以从数学上证明程序的行为符合预期。它还为设计更强大的函数式编程语言提供了坚实的理论基础。

对于数学来说，这种对应关系导致了证明助手的诞生，也称为交互式定理证明器。这些是有助于构建形式证明的软件工具，例如 Coq 和 Lean。在 Coq 中，证明的每一步本质上都是一个程序，证明的有效性通过类型检查算法进行检查。数学家们也一直在使用证明助手——特别是精益定理证明者——来形式化数学，这涉及以严格的、计算机可验证的格式表示数学概念、定理和证明。这使得有时非正式的数学语言可以被计算机检查。

研究人员仍在探索数学和编程之间这种联系的后果。最初的库里-霍华德通信将编



程与一种称为直觉逻辑的逻辑融合在一起，但事实证明，更多类型的逻辑也可以适应这种统一。

“自从库里提出见解以来，一个世纪里发生的事情是，我们不断发现越来越多的例子，其中‘逻辑系统 X 对应于计算系统 Y’，”康奈尔大学计算机科学家迈克尔克拉克森说。研究人员已经将编程与其他类型的逻辑联系起来，如线性逻辑，其中包括“资源”的概念，以及模态逻辑，它处理可能性和必然性的概念。

虽然这封信上有库里和霍华德的名字，但他们绝不是唯一发现它的人。这证明了通信的基本性质：人们一次又一次地注意到它。“计算和逻辑之间存在深厚的联系似乎并非偶然，”克拉克森说。



华中科技大学数学中心

Center for Mathematical Sciences

Wuhan, China

Web: mathcenter.hust.edu.cn

E-mail: mathcenter@hust.edu.cn

数学正在发生日新月异的变化。不仅数学内部各分支相互交融，共同推动数学向更高层次发展，而且科学与工程问题牵涉到越来越深的数学课题，对数学提出了重大挑战，激发了新的数学理论和方法的创立，从而推动数学本身的发展。数学也一直在背后推动着科学和工程技术的进步，为现代科学和高新技术的发展奠定坚实基础。世界强国必须是数学强国，数学弱国不可能是现代化强国，而现代高科技竞争同时包含数学研究的竞争。华中科技大学数学中心顺应科学发展趋势于2013年在武汉成立了。

数学中心宗旨

- (1) 积极倡导数学不同分支之间的交叉研究；激发新的合作探索，催生新的研究领域和研究群体；
- (2) 努力推动数学与科学、工程、医学之间的交叉研究；建立数学家和科学家之间的广泛联系，从而达到合作共赢；
- (3) 聚集一流人才，培养优秀学生，做出一流学术研究，引领学科发展，服务国家和社会。

数学中心成员

数学中心已有来自世界各国的优秀学者，包括院士，教授，副教授/副研究员，助理教授，客座教授、访问学者，博士后以及博士研究生。他们从国内外（包括美国、英国、法国、德国、澳大利亚等国家）汇聚到美丽的江城武汉东湖之滨，共同致力于基础数学，计算与应用数学，概率与统计，数据科学，数学物理与交叉科学的发展。

数学中心诚聘英才

无论您来自哪里，数学是我们的共同语言，欢迎您加入我们！

数学中心招聘网址：

<https://www.mathjobs.org/jobs/list/16913>

申请材料请寄段金桥老师：

mathcenter@hust.edu.cn



数学中心招聘二维码





华中科技大学数学中心

Center for Mathematical Sciences

Web: mathcenter.hust.edu.cn

E-mail: mathcenter@hust.edu.cn

华中科技大学数学中心招收2024年免推硕士研究生

华中科技大学数学中心招收2024年秋季入学免推硕士研究生（面向有免推资格的本科生。本科专业不限）。

招生视频: <https://x.eqxiu.com/s/3obeLrBg?eqrcode=1>

华中科技大学数学中心网站: <http://mathcenter.hust.edu.cn>

研究领域：包括随机动力系统，随机偏微分方程，随机分析，动力系统及其应用，几何与拓扑，偏微分方程，计算数学，应用数学，图像科学，数据科学与统计学，多尺度系统建模与计算模拟，数理地球科学和定量生物学，脑科学与金融数学的应用等。研究生指导团队实行双导师制，由本校专家和海外学者组成，包括院士，国家特聘专家，长江学者，青年学术英才，东湖讲座教授，楚天学者，优青，洪堡学者和华中学者。

数学中心已有来自世界各国的优秀学者，包括教授，副教授，研究员，副研究员，助理教授，客座教授、访问学者，博士后以及博士研究生。他们分别从美国、英国、法国、德国、澳大利亚等国家汇聚到美丽的江城武汉，在东湖之滨研究，学习与合作交流，共同致力于**概率与统计**，**计算与应用数学**，**基础数学**的发展。

欢迎有意愿的学生联系华中科技大学数学中心段金桥主任

(电邮: mathcenter@hust.edu.cn.)

欢迎加盟华中科技大学数学中心!



[数学中心网址](http://mathcenter.hust.edu.cn)



[招生视频](https://x.eqxiu.com/s/3obeLrBg?eqrcode=1)



地址：中国武汉珞喻路1037号
华中科技大学创新研究院(恩明楼)8楼
邮编：430074
电邮：mathcenter@hust.edu.cn
网页：mathcenter.hust.edu.cn

8th Floor of Enming Building
1037 Luoyu Road, Wuhan, China
Postal Code: 430074
E-mail: mathcenter@hust.edu.cn

内部刊物/免费交流