《数学建模及其应用》， 2016， Vol. 5， No. 1

什么是随机动力系统？

段金桥[1,2], 郑雅允[2], 白露[2], 姜涛[2]

1，华中科技大学 数学中心，湖北 武汉 430074

2，华中科技大学 数学与统计学院，湖北 武汉 430074

摘要： 本文综述随机动力系统的基本概念、理论、方法与应用，内容包括Brownian运动、Lévy运动和随机微分方程及其解的刻画。重点讨论通过量化指标、不变结构、几何方法和非高斯性态来理解随机动力学现象。本文还介绍了段金桥的著作《An Introduction to Stochastic Dynamics(随机动力系统导论)》的基本内容。

关键字： Brownian运动；Lévy运动；随机微分方程；随机动力系统；Fokker-Planck方程；不变流形

1 引言

工程与应用科学中的复杂系统经常受到随机扰动、随机环境、随机边界条件、随机输入和随机初始条件等随机因素的影响。另外被忽略的以及物理原因暂时还不明白的过程（unrepresented mechanisms），不可靠的观测量（uncertain observation），以及常常被忽略的小或快尺度运动对大或慢尺度运动的影响（unresolved scales）等等，也可用随机过程来描述或近似表示。随机动力系统（包括各种随机微分方程）就是这些在随机因素影响下的复杂系统的合适的数学模型[16]。这些

基金项目： 国家自然科学基金项目（11531006,11371367,11271290）和中央高校基本科研业务费专项资金资助（2014QT005）；**通讯作者：** 段金桥，Email: jqduan@hust.edu.cn

随机因素对系统的演化可能有很微妙的影响，有时看上去还有些违反常规。也正因为如此，随机动力系统因能够描述一些确定性动力系统所不能描述的复杂现象，而越来越受到其他学科的关注。可见，其它学科向我们提出了随机动力系统研究的问题，这也为数学提出了新的研究课题，包括非线性（nonlinearity）和不确定性（uncertainty）的相互作用。另一方面，随机分析研究在过去十年取得了很大进步。因此，作为随机分析和动力系统的结合，随机动力系统在近几年快速发展。可见，数学本身的发展也推动着随机动力系统的研究，包括分析与计算[16]。

综上所述，随机动力系统是随机分析与动力系统的结合。随机动力系统的研究既源于数学自身的发展，也得益于其它学科的推动。确定性动力系统，随机分析和数值分析的方法是研究随机动力系统的基础，并将在新的条件下得到发展。随机微分方程作为非线性系统在随机因素影响下的合适的数学模型，已得到广泛接受。就连确定性动力系统的当代鼻祖之一的E.N.Lorenz（他本人也是气候学家）在1975 年的日内瓦会议上也说到，“我相信最终的气候数学模型将是随机的，也就是说，随机项将出现在作为数学模型的偏微分方程中”[26]。

§1.1 一个简单的随机动力系统

在物理及地球物理中，“粒子”的运动会受到随机力的作用。在一维空间中，粒子移动位移记为x，当它受到一个阻力$-\gamma\dot{x}$（其中γ 为非负值），一个外力$K(x)$以及一个随机力$\xi(t)$ 的影响，其数学模型为

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}=K(x)+\xi(t).$$

对于一个受到随机力的单摆运动，其数学模型为

$$\ddot{x}=\sin(x)+\xi(t).$$

§1.2 简介一本新书:《An Introduction to Stochastic Dynamics(随机动力系统导论)》

在应用数学领域中，人们对于随机动力系统的研究兴趣越来越浓厚，但有些研究者可能会因为缺乏必要的知识导致阅读随机动力系统

的参考文献时感到吃力。段金桥的新书《An Introduction to Stochastic Dynamics(随机动力系统导论)》[15]正是面向此类人群。这本书从分析、计算、确定性的量化指标以及不变结构的角度介绍了研究随机微分方程的基本方法。在确定性动力系统中，不变流形及其它不变结构为了解动力学演化提供了全局信息。对于随机动力系统而言，除了这些不变结构，平均逃逸时间及逃逸概率等一些可计算的量也为研究不确定性条件下的全局动力系统提供了有用的方法。平均逃逸时间及逃逸概率可以通过求解确定性的局部或非局部偏微分方程得到，因此可将这些量看作研究随机动力系统的确定性工具。

《An Introduction to Stochastic Dynamics(随机动力系统导论)》以段金桥多年来所教授的研究生课程"随机动力系统"讲义为基础编写。学习这门课的学生中，三分之二是应用数学专业的，其余三分之一来自物理、生物工程、材料工程、电子工程等专业。考虑到学生对于微分方程、动力系统、概率论及数值分析的学习程度不一，一些有趣的问题未编入书中。部分内容是近期研究成果，包括第五章的最可能相图、第六章的随机不变流形，以及第七章的带有非高斯Lévy噪声的系统的平均逃逸时间、逃逸概率和非局部Fokker-Planck方程。书中的证明，有些详细给出，有些则只给出思路或者参考文献。并且在介绍随机动力系统中的新概念时，尽可能地将其与确定性动力系统中的相应概念作类比。

在介绍了一些启发性的例子（第一章）、分析与概率论的背景知识（第二章）、白噪声模型（第三章）以及随机微分方程相关概念（第四章）后，本书的重点主要集中在以下三方面：

(1) 随机动力系统中的量化指标（第五章）：矩、概率密度、最可能相图、平均逃逸时间、逃逸概率；

(2) 随机动力系统的不变结构（第六章）：乘法遍历理论、应用Hartman-Grobman定理对随机系统线性化、非线性随机系统的不变流形；

(3) 非高斯随机动力系统（第七章）：介绍由非高斯的α-稳定Lévy运动驱动的动力系统。

§1.3 本文的内容安排

本文综述随机动力系统的基本概念、理论、方法与应用，内容包括Brownian运动、Lévy运动和随机微分方程及其解的刻画。重点讨论通过量化指标、不变结构、几何方法和非高斯性态来理解随机动力学现象。

下面我们先介绍Brownian 运动与随机微分方程（§2)，然后讨论利用量化指标(§3)、不变结构(§4)、几何方法(§5)和非高斯性态(§6)来刻画随机动力学现象。

2 随机微分方程

自然科学和工程学中的复杂系统总是不可避免地会受到噪声的影响，其中白噪声是最简单但很常见的一类噪声。白噪声是数学期望为0，自相关函数为狄拉克 δ 函数的广义平稳高斯过程。由于随机过程的功率谱密度是其自相关函数的傅里叶变换，而 δ 函数的傅里叶变换为常数，因此白噪声的功率谱密度是平坦的。即，此信号在各个频段上的功率是一样的。由于白光是由各种频率（颜色）的单色光混合而成，因而此信号的这种具有平坦功率谱的性质被称作是“白色的”，此信号也因此被称作白噪声[15]。其它不具有这一性质的噪声信号被称为有色噪声。高斯白噪声是Brownian运动的广义导数，其严格定义是建立在广义函数理论之上的。

§2.1 Brownian 运动

Brownian运动指的是液体中悬浮微粒永不停息地做无规则运动的现象。它是在1827年英国植物学家罗伯特·布朗利用显微镜观察悬浮于水中由花粉所迸裂出的微粒时发现的。Brownian运动是大量分子做无规则运动对悬浮的固体微粒各个方向撞击作用造成的，是大量液体分子集体行为的结果。但是我们现在所说的Brownian运动是抽象的，它是指一类随机过程。取值为实数的Brownian 运动数学定义如下[15]：

Definition 2.1 (Brownian运动). *定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机过程，$B_t$ 或者$B(t)$，如果满足以下条件，则称之为Brownian运动：*
(i) $B_0 = 0$ $a.s.$;
(ii) 样本函数$t \to B_t(\omega)$ 连续，$a.s.$;
(iii) B_t 具有独立增量：对任意n及$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，随机变量$B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 相互独立；
(iv) B_t 具有高斯平稳增量，即对任意s, t $(0 \le s < t), B_t(\omega) - B_s(\omega)$服从均值为0，方差为$t - s$ 的正态分布。

高维空间的Brownian运动也可以类似定义。

§2.2 Itô随机积分与随机微分方程

Itô随机积分的出现标志着随机分析真正意义上的开始。

Itô积分是对Brownian运动定义的一种随机积分。正如大家所知道的，Brownian运动的样本函数虽然连续，但几乎所有的样本函数非有界变差，甚至处处不可微，因而无法按样本函数来定义通常的Riemann-Stieltjes积分或Lebesgue-Stieltjes积分。一般来说,Riemann-Stieltjes积分定义中的达布和不会以概率1 收敛到一定的极限,但在适当的条件下，达布和的均方极限存在。Itô是利用这一性质定义了对Brownian运动的随机积分。

给定一个随机四元组$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$，其中$\mathcal{F}_t \triangleq \sigma(B_s, s \le t)$ 是时刻t为止Brownian 运动生成的σ 代数（形成一个Filtration)。被积随机函数

$$f : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^1, (t, \omega) \to f(t, \omega)$$

满足两个条件:
(i) f 是$\mathcal{F}_t$ 适应的，即$f(t, \cdot)$ 是$\mathcal{F}_t$ 可测的；
(ii) f 是平方可积的，即$\mathbb{E}\int_0^T f^2(t, \omega)dt < \infty$.

$\int_0^T f(t, \omega)dB_t$ **的定义**：类似于定义经典勒贝格积分的由简单函数到一般可测函数的程序，Itô随机积分也是先对简单随机函数定义积分，再由简单随机函数在均方可测随机函数类中的稠密性，可将定义

延拓至整个均方可测随机函数类。需要注意的是,在达布和的构造中,被积随机函数在时间区间$[t_i, t_{i+1}]$ 上的取值点不是随意一点,而只能是它的左端点t_i。这是一个Itô随机积分的本质的限制。另外，不同的取点方式会得到不同的极限，从而定义出另外的随机积分。例如，对所有时间区间都取中点，得到的是Stratonovich积分。本文只讨论Itô随机积分$\int_0^T f(t,\omega)dB_t$，其相应的Itô 随机微分记为$f(t,\omega)dB_t$。

形如

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t. \tag{2.1}$$

的一维方程称为Itô随机微分方程。理论上对随机微分方程已有很多研究，解的存在唯一性问题已经解决，并且有各种形式的推广，如用半鞅代替Brownian运动等。但是必须了解的是仅仅在少数十分简单的情形才能把解明确表达出来。随机分析中最著名且重要的公式当属Itô公式，它可以看做随机版的链式法则。假设X_t 为方程(2.1)的解，$g(t,x)$为标量光滑函数，Itô 公式告诉我们如何对$g(t,x)$做微分：

$$\begin{aligned} dg(t,X_t) =&[\frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t) + b(X_t)\frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)]dt \\ &+ \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)\sigma(X_t)dB_t. \end{aligned}$$

高维的随机微分方程也有类似的Itô公式[15]。

3 随机动力系统的量化指标

为了研究经典的由确定型微分方程所描述的动力系统，人们已经得到许多定量的指标，如特征值，Poincare指数，吸引子的Hausdorff维数，等等。它们定量地刻画了系统整体特性或动力学性态。类似地，对于由随机微分方程所描述的随机动力系统，我们也希望能够得到一些可以反映随机系统信息的量化指标。其中，较为自然地有均值，概率密度函数，平均逃逸时间(Mean exit time)和逃逸概率(Escape probability)等等。

§3.1 概率密度函数

对于一个随机变量，只要我们知道它的概率密度函数，那么我们就可以计算它的均值，方差以及任意的高阶矩。而随机微分方程(2.1)的解$X(t)$ 依赖时间，因此它的概率密度函数$p(x,t)$也与时间有关。刻画$p(x,t)$随时间演化的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}p = A^*p$$

称为Fokker−Planck 方程，其中A^* 为方程(2.1)的无穷小生成元A 的共轭算子，

$$A^*p = -\partial_x(bp) + \frac{1}{2}\partial_{xx}(\sigma^2 p).$$

对于由Brownian运动驱动的随机微分方程，能够得到Fokker-Planck方程的显式表达式。这一点与Lévy 运动驱动的情形不同。后者一般情况下难以得到显式表达式，原因在于不易得知其方程对应的无穷小生成元的共轭算子表达式。高维的Fokker-Planck方程见[15]。

§3.2 平均逃逸时间

平均逃逸时间被用来描述随机系统在状态空间的某一邻域停留了多久。我们首先定义随机微分方程(2.1)一个解的轨道从某个初始点x 开始，首次到达区域D 的边界的时间

$$\tau_x(\omega) = \inf\{t \geq 0, X_t(\omega, x) \in \partial D\}.$$

平均逃逸时间定义为$u(x) := \mathbb{E}\tau_x(\omega)$, 对于所有$x \in D$. 由Dynkin 公式[15]，对于从区域$D$的某个初始点$x$ 开始的解（有时按物理学家的叫法，称为“粒子”），它的平均逃逸时间满足下面的偏微分方程

$$\begin{aligned} Au(x) &= -1, \qquad x \in D, \\ u(x)\mid_{\partial D} &= 0, \end{aligned}$$

其中A为方程(2.1)的无穷小生成元：

$$Au(x) = b(x)u'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)u''(x).$$

如果区域D的边界，漂移系数b与扩散系数σ 满足一定光滑条件，则可以保证平均逃逸时间的存在唯一性与正则性。

§3.3 逃逸概率

逃逸概率被用来描述系统从一个状态进入另一个状态的转换概率。系统从一个稳态逃逸到另一个稳态的概率越大，则说明这个稳态越不稳定。从初始点x 出发的粒子，随机系统(2.1)第一次通过特定的一部分边界$\Gamma \subset \partial D$逃逸出区域$D$的概率称为逃逸概率，记为$p(x)$。逃逸概率$p$ 是下面Dirichlet 问题的解

$$\begin{aligned} Ap(x) &= 0, \qquad x \in D, \\ p\mid_{\Gamma} &= 1, \qquad p\mid_{\partial D \setminus \Gamma} = 0. \end{aligned}$$

其中A为方程(2.1)的无穷小生成元：

$$Ap(x) = b(x)p'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)p''(x).$$

4 随机动力系统的不变结构

不变几何结构对于我们理解确定性动力系统发挥着重要作用。例如对于线性系统，确定了特征空间之后，系统的状态就基本清楚了；类似地，在非线性系统中，不变流形具有相同的意义。又比如，惯性流形是有限维光滑的不变流形，它包含全局吸引子并且具有指数吸引性质。即使初始（耗散）系统为无限维的，只要将方程限制在惯性流形上面来考虑，就可以得到有限维的惯性系统。而研究惯性流形上的系统会大大降低问题的维数。并且由于其指数吸引性质，长远来看，其上的解的性态大致上反映了整个空间中解的发展情形，使得对惯性流形的研究的价值得到广泛认同与肯定。为了研究随机动力系统，自然也希望知道随机系统的解是如何演化的。为此必须首先引进对应的概念，如随机不变集，随机不变流形，随机吸引子，等等。

§4.1 随机动力系统

一个随机动力系统，记为φ，包括两个组成部分：

（i）噪声模型：一个概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的驱动流，即，一个在样本空间$\Omega$上的流$(\theta_t)_{t\in T}$，使得$\mathbb{P}$ 不变，即对所有的$t \in T, \theta_t\mathbb{P} = \mathbb{P}$，且$(t, \omega) \to \theta_t\omega$ 在$T \times \Omega$到Ω 上可测。

（ii）系统演化模型：一个关于θ 的cocycle φ，即，一个定义在度量空间H 上的可测映射$\varphi : T \times \Omega \times H \to H, (t, \omega, x) \to \varphi(t, \omega, x)$，使得一族随机映射族$\varphi(t, \omega, \cdot) = \varphi(t, \omega) : H \to H$ 对所有的$t, s \in T, \omega \in \Omega$，满足cocycle性质：$\varphi(0, \omega) = id_H, \quad \varphi(t + s, \omega) = \varphi(t, \theta_s\omega) \circ \varphi(s, \omega)$。这里$id_H$是$H$上的恒等算子。

在相当一般的条件下，随机微分方程(2.1)具有初始条件$X_0 = x$的解$\varphi(t, \omega, x)$ 定义一个随机动力系统。

§4.2 随机不变流形

为研究随机不变流形，首先需要将随机微分方程转化成带有随机系数微分方程，然后对这个新的微分方程的线性项与非线性项施加必要的限制，就可以得到随机不变流形的存在性结论[7, 15]。

5 随机动力系统的几何方法

我们希望用几何的方法探讨随机动力系统[5]。

最可能相图：概率密度函数p 可以看成(x, t, p)空间的曲面。对固定的时间t，$p(x, t)$ 达到的最大的$x_m(t)$ 意味着随机系统(2.1)在时刻t最有可能的位置。随着时间的移动，不同初始点出发的$x_m(t)$ 的轨迹就是最可能相图([15, ch.5]，[12])。注意，最可能相图并不表示具体的轨道。

随机动力系统的拓扑性质：最近，拓扑方法也用于研究随机动力系统。比如，Conley指标[9]用于刻画随机分叉，以及随机流的分解与表示[10, 11, 13]。

6 非高斯随机动力系统

下面我们考虑由Lévy运动驱动的随机动力系统。

§6.1 Lévy 运动的定义及性质

在自然科学和工程学中，动力系统总是受到随机扰动的影响。但是这样的随机扰动除了前面提到的高斯过程外，我们考虑带有非高斯过程的随机动力系统。尽管高斯过程作为数学模型，广泛的应用于各种具有不确定性的复杂系统，但是在物理、地球科学、生物学、化学、机械等学科的复杂系统中，很多复杂的现象都包含了非高斯过程。在很多的非高斯过程中，Lévy 运动被认为是非高斯扰动的一个适当的数学模型，而α－稳定的Lévy 运动又是一类特殊但重要的Lévy运动。它的跳跃测度有具体的表达式，方便计算。所以我们一般考虑由α－稳定的Lévy 运动驱动的随机动力系统。Applebaum[2]、Sato[36] 给出了Lévy 运动的定义，类似于Brownian 运动的定义。

Definition 6.1 (Lévy运动). *一个Lévy运动, L_t 或者$L(t)$, 是一个随机过程，满足下面条件:*

(i) $L_0 = 0$, a. s.;

(ii) 独立增量性：对于任意的时间分割$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，随机变量$L(t_2) - L(t_1), \cdots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ 是独立的;

(iii)平稳增量性：对$t > s$, $L_t - L_s$ 和L_{t-s} 具有相同的分布;

(iv) 样本轨道依概率连续：对于所有的$\delta > 0$ 且$s \geq 0$, $\mathbb{P}(| L_t - L_s |> \delta) \to 0$, 当$t \to s$ 时。

Brownian 运动的样本轨道关于时间是连续的，而Lévy运动的样本轨道是右连左极的。通常我们根据概率密度函数来研究Brownian运动，而一般的Lévy 运动的概率密度函数很难给出。Applebaum[2] 提到Lévy-Khintchine 公式是Lévy 运动的特征函数的表达式。

若$L(t)$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的Lévy 运动，则特征函数是

$$\Phi_t(u) = \mathbb{E}e^{i<u,L_t>} = e^{t\eta(u)}.$$

其中，对于每个$t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\eta(u) = & i < b, u > -\frac{1}{2} < u, Qu > \\ & + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} [e^{i<u,y>} - 1 - iI_{\{\|y\|<1\}} < u, y >]\nu(dy).\end{aligned} \tag{6.2}$$

这里向量$b \in \mathbb{R}^n$, Q 是$n \times n$的非负定对称矩阵，而ν 是定义在$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上的Borel 测度，且满足$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} (\|y\|^2 \wedge 1)\nu(dy) < \infty$。这个三元组$(b, Q, \nu)$ 称为Lévy 运动的生成三元组。

一类特殊且非常重要的Lévy运动是α－稳定的旋转对称的Lévy运动L_α^t，$0 < \alpha < 2$。它的三元组为$(0, 0, \nu_\alpha)$，其中

$$\nu_\alpha(dy) = c(n, \alpha)\frac{du}{\|u\|^{n+\alpha}}.$$

这里$c(n, \alpha)$ 是关于n 和α 的正常数。当$\alpha = 2$时，Lévy 运动就是Brownian 运动，所以说Brownian 运动是特殊的Lévy 运动。

Janicki和Weron[24]只给出了标准的对称的α－稳定的Lévy 运动的概率密度函数，但是形式十分复杂，所以我们主要是通过特征函数来研究Lévy 运动。

Lévy运动可以作为随机扰动的模型。比如说在旋转环形流体流动的湍流运动中，一个被动的示踪粒子可能会经历一系列的“停顿”，在颗粒被涡流困在一个随机的时间段后，会发生跳跃，即颗粒被喷射到喷流，经过一个随机时间段，又陷入另一个涡流。这个持续的事件被发现遵循α－稳定Lévy过程的运动规律。另外，α－稳定的Lévy运动已经证实可以作为海洋流体流动和异常非局部表面扩散，生物基因调控，金融等随机涨落现象或者系统的适当数学模型。

此外Brownian 运动和Lévy 运动尾部的分布也有所不同。对于$\alpha = 2$也就是正态标量的随机变量的尾部估计具有轻尾分布的特性。Samorodnitsky和Taqqu[35] 给出了表达式，

$$\mathbb{P}(X > y) \sim \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}y}, y \to \infty.$$

而对于$0 < \alpha < 2$时，标量的对称Lévy随机变量的尾部估计具有重尾分布的特性, 即

$$\lim_{y\to\infty} y^\alpha \mathbb{P}(X > y) = \frac{1}{2} C_\alpha \sigma^\alpha.$$

其中C_α 是正数，σ是刻度参数。

在$\mathbb{R}^n$上旋转对称的α－稳定Lévy运动的生成元具有下面的表达式（Applebaum[2]）:

$$A_\alpha \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} [\varphi(x+y) - \varphi(x)] \nu_\alpha(dy).$$

等号的右端是Cauchy 主值积分。

我们都知道，Brownian运动的生成元是Laplacian算子，通过Sobolev空间的性质[1]和Fourier 逆变换, 可以得到这个α－稳定的旋转对称Lévy 运动的生成元就是非局部的Laplacian 算子，即

$$A_\alpha \varphi(x) = \theta_{\alpha,n} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi, \qquad \alpha \in (0,2).$$

这里$\theta_{\alpha,n}$ 是小于0 的常数。

§6.2 由α－稳定的Lévy运动驱动的动力系统

我们考虑由旋转对称α－稳定的Lévy 运动驱动的随机微分方程模型:

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t) + dL^\alpha(t), \qquad X(0) = x \in \mathbb{R}^n.$$

我们通过平均逃逸时间、逃逸概率、Fokker-Planck 方程、亚稳态性和稳定域等理论工具，来研究由α－稳定的Lévy 运动驱动的动力系统的行为。

§6.2.1 平均逃逸时间和逃逸概率

由旋转对称的α－稳定的Lévy 运动驱动的动力系统的平均逃逸时间和逃逸概率的描述与Brownian 运动驱动时的类似。不过α－稳定

的Lévy 运动驱动的动力系统的生成元A有下面的表示：

$$\begin{aligned} Au(x) &= b\cdot\nabla u+\frac{1}{2}Tr[\sigma\sigma^T H(u)] \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}[u(x+y)-u(x)-I_{\{\|y\|<1\}}y\cdot\nabla u]\nu_\alpha(dy). \end{aligned}$$

其中Tr是矩阵的迹（$Trace$),而$H(u)$是u的$Hessian$矩阵。

Imkeller 和Pavlyukevich[22, 23], Yang 和Duan[45] 讨论了当噪声强度充分小的时候，对$u(x)$的近似估计。Chen 等人[8] 和Gao 等人[17] 针对Ornsten-Uhlenbeck 系统或者Double-Well系统，即$b(x)=-x$ 或者$b(x)=x-x^3$, 考虑由协方差为d 的高斯噪声和三元组为$(0,0,\varepsilon\nu_\alpha)$ 的旋转对称的α－稳定的Lévy 噪声驱动的随机动力系统的模型，即

$$dX(t)=b(X(t))dt+\sqrt{d}dB(t)+dL^\alpha(t), \qquad X(0)=x\in\mathbb{R}^1.$$

通过数值算法，对影响平均逃逸时的相关因素如稳定指数α、逃逸区域D、高斯噪声协方差d 做了相关分析。

Gao等人[17]用数值计算的方法，分析了系统的平均逃逸时间和逃逸概率受相关因素的影响，Qiao 和Duan[32] 等人用近似分析的方法，考虑了具有高斯噪声和纯跳情况下的α－稳定的Lévy运动驱动的随机动力系统的平均逃逸概率的显示表达。Wang 等人[44, 43]通过做无量纲化处理, 发展出求解一维非对称α－稳定Lévy运动情形下的平均逃逸时和逃逸概率数值方法。同时，也验证了数值方法的收敛性，并考虑了偏度参数、漂移项、高斯噪声和非高斯噪声强度、区域大小对平均逃逸时的影响。并且研究了由二维旋转对称α－稳定Lévy运动驱动下平均逃逸时和逃逸概率。由于一般情形下问题具有复杂性，为了研究的方便，在对过程和区域做了对称性假设后，引入高斯超几何函数，将原来的二维方程降维，从而发展了一种新的数值方法。

§6.2.2 Fokker-Planck方程

概率密度函数是另外一个帮助我们理解随机变量的刻画，而Fokker-Planck方程就是用来描述概率密度函数随时间发展的偏微分方程[15,

ch.7]。它是研究随机动力系统行为的有效工具。对由Brownian过程驱动的随机微分方程的Fokker-Planck方程已经有很成熟的研究，Sun等人[41, 42]给出了Lévy运动驱动的随机微分方程在Marcus积分意义下的Fokker-Planck方程的表达形式的推导。作为一个由物理背景导出的方程, 其不仅能非常有效地刻画非高斯噪声驱动的随机微分方程的动力学行为, 而且能作为许多物理现象的模型, 如地球物理和生物物理系统中的非正规扩散等。

§6.3 随机动力系统的应用

随机动力系统在地球物理，生物物理和数学物理等领域有广阔的应用前景。

我们在考虑有关基因调控模型。比如Suel等人的ComK、Co-mS模型[39, 40]和Smolen的转录因子TF-A 模型[38]细胞分化的动力学依赖于基因电路的结构、定量参数和扰动，但是我们依然不清楚这些因素是如何控制细胞行为的。众多的理论和实验结果[39, 40] 已经证实噪声在细胞分化中起着关键作用，它可以使不同的状态($Regime$)之间随机转换。事实上，我们都意识到在研究基因表达、蛋白质浓度和细胞之间的生物化学反应时，如DNA的转录、翻译时将随机扰动考虑进去的重要性。

Hao等人[21] 考虑了肿瘤增长模型，利用平均逃逸时间和平均逃逸概率来刻画肿瘤密度的变化情况。

另一方面，在一些系统中，噪声扰动下的亚稳态性可以使任何一个稳态转换，并且经过一段时间之后又转换回来。亚稳态性意味着，达到稳定状态的时间虽然长但是有限[22, 23]。亚稳态性是一个敏感的现象，分析它的办法不多，所以在这个领域还有很多问题值得研究。此外，通过稳定域的大小也可以来研究多稳态系统各个稳态的稳定性如何。这种稳定性研究在确定性系统已经有很多的理论[27]，但是随机系统的吸引域的稳定性还没有很好的定义，所以这些方面仍然是研究的热点和前沿课题。

致谢：贺紫盈，袁胜兰，蔡睿和王慧对本文提出了宝贵的意见，我们表示衷心感谢。

参考文献

[1] A. Adams and F. Fourier, *Sobolev Spaces,* 2nd Edition, Academic Press, New York，2nd Edition, 2003.

[2] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Caculus,* 2nd Edition, Cambridge University Press, New York, 2009.

[3] L. Arnold, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications,* 2nd Edition, Dover, New York, 2012.

[4] L. Arnold, *Random Dynamical Systems,* 2nd Edition, Springer, New York, 2003.

[5] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equation,* 2nd Edition, Springer, New York, 1988.

[6] R. Ash and C. Doleans-Dade, *Probability and Measure Theory,* 2nd Edition, Academic Press, New York, 2007.

[7] T. Caraballo, J. Duan, K. Lu and B. Schmafuss, Invariant manifolds for random and sthochastic partial differential equations, *Adv. Nonliear Stud,* 23-52, 2009.

[8] H. Chen, J. Duan, X. Li and C. Zhang, A computational analysis for mean exit time under non-Gaussian Levy noises.*Appl. Math. Comput.*,volume218,issue5,2011,pp. 1845-1856.

[9] X. Chen and J. Duan, Random chain recurrent sets for random dynamical systems, *Dynamical Systems*, 24:4, 537-546, 2009.

[10] X. Chen, J. Duan and X. Fu, A sufficient condition for bifurcation in random dynamical systems, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 138, 965-973, 2010.

[11] X. Chen, J. Duan and M. Scheutzow, Evolution systems of measures for stochastic flows, *Dynamical Systems*, Vol. 26, 323-334, 2011.

[12] Z. Cheng, J. Duan, L. Wang, Most probable dynamics of some nonlinear systems under noisy fluctuations, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat* ,30(2016) 108-114.

[13] S.-N. Chow, W. Li, Z. Liu and H. Zhou, A natural order in dynamical systems based on Conley-Markov matrices, *J. Differential Equations*, Vol.252, 3116-3141, 2012.

[14] P.D. Ditlevsen, Anomalous jumping in a double-well potential, *Phys. Rev. E,* Volume 60(1),172-179, 1999.

[15] J. Duan, *An Introduction to Stochastic Dynamics* (随机动力系统导论）, Cambridge University Press (国外版）, New York, 2015；Science Press (国内版）, Beijing, 2015.

[16] 段金桥，任剑，随机动力系统与现代应用数学，数理科学若干领域进展，34-41，2011.

[17] T. Gao, J. Duan, X. Li and R. Song, Mean exit time and escape probability for dynamical systems driven by Lévy noises.*SIAM J. Sci. Computing,*Vol.36 , No.3,pp. A887-A906, 2014.

[18] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics,* Springer, 2nd Edition, New York, 1985.

[19] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* 2ed Edition, Springer, New York, 1983.

[20] 郭仲凯，随机偏微分方程的不变结构及相关性质. 武汉：华中科技大学, 2014.

[21] M. Hao, J. Duan, R. Song and W. Xu, Asymmetric non-Gaussian efficts in a tumor growth model with immunization.*Applied Mathematical Modelling* **38**(2014)4428-4444.

[22] P. Imkeller and I. Pavlyukevich, Lévy flights:transitions and metastability, *Journal of Physics A: Mathematical and General,* 39,L237-L246, 2006.

[23] P. Imkeller, I. Pavlyukevich and T. Wetzel, First exit times for Lévy-driven diffusions with exponentially light jumps. *Ann. Probab.* Volume**37**,Number 2(2009),530 – 564.

[24] A. Janicki and A. Weron, *Simulation and Chaotic Behavior of α-Stable Stochastic Processes,* Marcel Dekker, New York, 1994.

[25] F. Klebaner, *Introduction to Stochastic Calculus with Applications,* 2nd Edition, Imperial College Press, New York, 2005.

[26] E. N. Lorenz, Climate predictability, *GARP Pub. Ser.*, No. 16, the Physical Basic of Climate Modelling, 132-136，1975.

[27] P. Menck, J. Heitzig, N. Marwan and J. Kurths, How basin stability complements the linear-stability paradigm, *Nat. Phys.,* 89 – 92, 2014.

[28] T. Mikosch, *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific, New Jersey, 1998.

[29] D. Mumford, The Dawning of the age of stochasticity, *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, V.I. Arnold , M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur (Eds.)，American Math Society, RI, 2000.

[30] B. K. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications,* 6th Edition, Springer, New York, 2003.

[31] S. Peszat and J. Zabczyk, *Stochastic Partial Differential Equations with Lévy Noise,* Cambridge University Press, New York, 2007.

[32] H. Qiao and J. Duan, Asymptotic methods for stochastic dynamical systems with small non-Gaussian Lévy noise, *Stochastics and Dynamics* **15**(2015),No.1,1550004.

[33] 钱敏平，龚光鲁，随机过程论，北京大学出版社，1997.

[34] J. Ren, J.Duan and X.Wang, A parameter estimation method based on random slow manifolds.*Applied Math. Modelling* **39**(2015) , 3721-3732.

[35] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian random processes,* Chapman Hall, London, 1994.

[36] K. Sato,*Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions,* Cambridge University Press, New York, 1999.

[37] M. Shlesinger, G. Zaslavsky and U. Frisch, *Lévy Flights and Related Topics in Physics,* Springer, Berlin, 1995.

[38] P. Smolen, D. A. Baxter, J. H. Byme, Frequency selectivity, multistability, and oscillations emerge from models of genetic regulatory systems, *Am. J. Physiol,*274(2Pt 1): C531-542, Feb. 1998.

[39] G. Suel, J. Ojalvo, L. Liberman and M. B. Elowitz, Tunability and noise dependence in differentiation dynamics, *Science,* Vol.315, No.5819,pp.1716-1719,2007.

[40] G. Suel, R. Kulkarni, J. Dworkon, J. Ojalvo and M. B. Elowitz, An excitable gene regulatory circuit induces transient cellular differentiation, *Nat. Lett.,* Vol.440,545-550, 2006.

[41] X. Sun ,J. Duan, Fokker-Planck equations for nonlinear dynamical systems driven by Non-Gaussian Lévy processes.*J. Math. Phys.* **53**,072701(2012).

[42] X. Sun ,J. Duan and X. Li, An alternatice expression for stochastic dynamical systems with parametric poisson white noise. *Probabilistic Engineering Mechanics* **32**(2014),1-4.

[43] X. Wang, J. Duan and X. Li and Y.Luan, Numerical methods for the mean exit time and escape probability of two-dimensional stochastic dynamical systems with non-Gaussion noises.Volume 258,1 May 2015,Pages 282-295.

[44] 王晓, 非高斯随机动力系统的平均逃逸时间和逃逸概率的数值算法. 武汉: 华中科技大学, 2015.

[45] Z. Yang and J. Duan, An intermediate regime for exit phenomena driven by non-Gaussian Lévy noises.*Stochastics and Dynamics* **8** (2008), Vol.8, 583-591.

What Are Stochastic Dynamical Systems?

Jinqiao Duan[1,2], Yayun Zheng[2], Lu Bai[2], Tao Jiang[2]

1，Center for Mathematical Sciences, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China

2，School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China

Abstract: This is a survey and review about stochastic dynamical systems. This includes basic concepts, theory, methods and applications. More specifically, this article discusses Brownian motion, Lévy motions, stochastic differential equations, and methods to examine stochastic dynamical behaviors via mean exit time,and escape probability, Fokker-Planck equations, invariant manifolds, most probable phase portraits. Finally, an overview about the new book “An Introduction to Stochastic Dynamics” (by Jinqiao Duan) is provided.

Key words: Brownian motion; Lévy motions; stochastic differential equation; stochastic dynamical system; Fokker-Planck equation; invariant manifold

作者简介

段金桥，男，教授，博士生导师，长江学者，千人计划专家，华中科技大学数学中心($mathcenter.hust.edu.cn$)主任，从事随机动力系统的理论与应用以及数学与其它学科的交叉等研究。

郑雅允，女，博士，从事随机动力系统应用于基因调控的研究。

白露，女，博士，从事随机动力系统不变流形的研究。

姜涛，男，博士，从事不变流形的逼近的研究。